REVISTA MENDOM@TIC@

Número 14

Diciembre de 2007

Aportes para la enseñanza de la Matemática de Mendoza

> *"Como" se hace matemática en el aula define al mismo tiempo "que" matemática se hace y "para qué" y "para quienes" se la enseña….**
>
> * En "Cuadernos para el aula" – Dirección Nacional de Gestión Curricular y Formación Docente.

Amigos docentes:

Seguimos aquí, intentando ayudar y ayudarnos a seguir adelante en esta tarea de enseñar. En esta edición seleccionamos los siguientes temas:

1. Conjeturas y pruebas en Matemática
2. Galois: pasión amor y matemática
3. Situación didáctica para EGB3
4. Curiosidades matemáticas
5. Humor matemático

1. CONJETURAS Y PRUEBAS EN MATEMÁTICAS

La matemática ofrece un conocimiento seguro basado en el razonamiento deductivo. Para probar que un resultado en matemática es válido no basta con probar que se cumple para una serie de casos particulares, aunque estos casos sean numerosos.

Ejemplo 1: Sigamos los pasos siguientes

a) Toma dos números, por ejemplo (2 y 3)
b) Elévalos al cuadrado (4 y 9 respectivamente)
c) Llama a *a* la suma de los cuadrados (13)
d) Llama *b* a la diferencia (5)
e) Llama *c* al doble producto de los números (12)
f) Se verifica que un triángulo de lados *a*, *b* y *c* es rectángulo, ya que se cumple el teorema de Pitágoras $a^2 = b^2 + c^2$

Conjetura: ¿Es esto independiente de los números que elijamos al principio? Es decir, si en lugar de haber elegido 2 y 3 tomamos 3 y 5 ¿Los nuevos valores de a, b y c así obtenidos forman triángulo rectángulo?

Ejemplo 2: Consideremos las siguientes observaciones

a) Existen números primos consecutivos (gemelos): (3, 5), (17,19), (29,31) ...que sólo dejan un número compuesto entre ellos.
b) Hay sucesiones de tres números compuestos consecutivos 8, 9 y 10 entre los primos 7 y 11, Igualmente 24, 25, 26, 27 y 28 entre los 23 y 29.
c) ¿Podríamos encontrar 20 números compuestos consecutivos?

Conjetura: ¿Podríamos encontrar un número arbitrario, n, de números compuestos consecutivos?

Las conjeturas son juicios que se forman de una cosa por señales o indicios que se tienen de ellas. En matemática formulamos en ocasiones enunciados de forma conjetural, es decir, proponemos resultados que nos parecen verdaderos porque se cumplen en muchas ocasiones. Algunas veces los resultados formulados resultan ser ciertos, pero, en otras ocasiones, concluimos que son falsos.

A lo largo de la historia de la matemática se han formulado muchas conjeturas, veamos algunas conjeturas numéricas.

a) Conjetura de A. De Polignac (1817-90): *Todo número impar se puede escribir como suma de una potencia de dos y un número primo*

5= 4+1, 7=4+3, 9=4+5, 11=8+3, 13=8+3 15=8+7 .....

101 = 4+97, 101 = 64 +37 (127 no lo cumple)

b) Conjetura de Christian Goldbach (1690-1764) Fue mencionada por primera vez en una carta de Christian Goldbach, profesor de matemática de San Petersburgo y tutor del zar Pedro II de Rusia, a Euler en 1742. La conjetura afirma que cualquier número par y mayor que 2 se puede expresar como suma de dos números primos.

4 =3+1, 8= 5+3, 10 =3+7, 18 = 13 +5, 36 =31+5 50 = 3 + 47 …

c) Conjeturas para fórmulas polinómicas generadoras de números primos: El polinomio $2x^2 + 29$ produce números primos para valores enteros de x comprendidos entre 0 y 28. El polinomio $x^2 + x + 41$ de Euler podía transformarse en $y^2 - 79y + 1601$, con el cambio de variable $x = y - 40$ y podía dar números primos para ochenta números consecutivos.

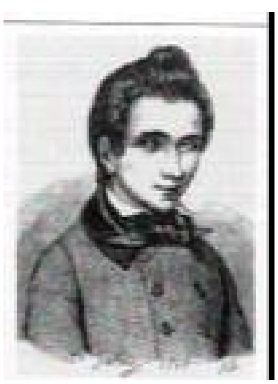
Las investigaciones en este sentido terminaron cuando el matemático alemán Goldbach demostró que ningún polinomio podía generar números primos para todos los valores de la variable x y, por su parte Legendre probó que ninguna función algebraica racional podía generar siempre números primos.

e) Conjetura de Pierre Fermat[1]: *No es posible descomponer un cubo en suma de dos cubos, ni una cuarta potencia en suma de dos cuartas potencias, ni en general ninguna potencia de exponente de exponente mayor que dos en suma de dos potencias del mismo exponente*. Equivalentemente, no existen enteros no nulos a, b, c tales que satisfagan la ecuación $a^n + b^n = c^n$, para cualquier n mayor que 2.

Que se verifique una fórmula para unos pocos casos no vale, un millón de casos tampoco la probarían, tiene que cumplirse para todos los casos.

Volver al inicio

2. Galois: pasión, amor y matemática

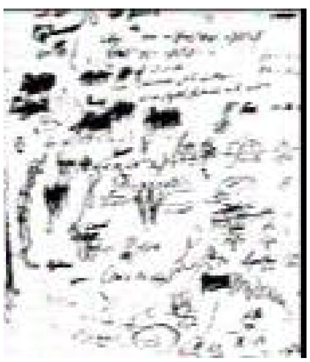


El chico de la imagen es Evariste Galois, quien junto a Abel es el matemático más joven de la historia. Nace el 25 de octubre de 1811 en el pequeño pueblo de Bourg- La-Reine cercano a Paris y muere el 31 de mayo de 1832 también en Paris antes de cumplir los 22 años.
Tuvo una vida complicada, en parte por su carácter revolucionario e inconformista.
El 2 de julio de 1829 se suicida su padre y algunos días después sufre su segundo fracaso al querer ingresar en una casa de estudios. Presentó ante la academia de ciencias muchos trabajos que eran sistemáticamente rechazados por grandes matemáticos, Poisson entre ellos.
Encarcelado dos veces a partir del 14 de julio de 1831, es provocado a duelo después

[1] Probada definitivamente en 1995 por el matemático inglés Andrew Wiles.

de una ruptura amorosa y en circunstancias muy oscuras; redacta el 29 de mayo de 1832 una carta a su amigo Auguste Chevalier que ha quedado como su testamento matemático:

"He hecho algunos descubrimientos nuevos en análisis. El primero concierne a la teoría de ecuaciones; los otros, a las funciones enteras. En teoría de ecuaciones he investigado las condiciones de solubilidad de ecuaciones por medio de radicales; con ello he tenido ocasión de profundizar en esta teoría y describir todas las transformaciones posibles en una ecuación, aun cuando no sea posible resolverla por radicales. Haz petición pública a Jacobi o a Gauss para que den su opinión, no acerca de la veracidad, sino sobre la importancia de estos teoremas. Confío en que después algunos hombres encuentren de provecho organizar todo este embrollo."



Escrito original de Galois la noche antes del duelo que le quitaría la vida.
Escribe cada tanto "No tengo tiempo" y el nombre de la mujer por quien parece haberse batido a duelo: Stephanie.

Volver al inicio

3. Actividad geométrica para 8º[2]

Alfombras

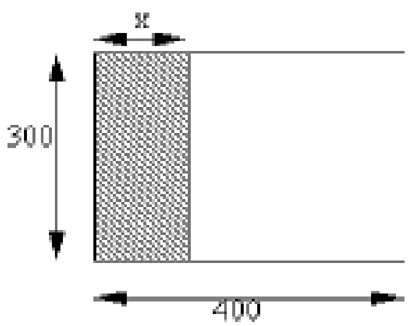
Esta actividad nos permite trabajar con los alumnos la transición de los cálculos aritméticos a las escrituras algebraicas.

Tomando como "pretexto" calcular el área de una alfombra, los alumnos son llevados a expresar áreas mediante el uso de escrituras algebraicas.

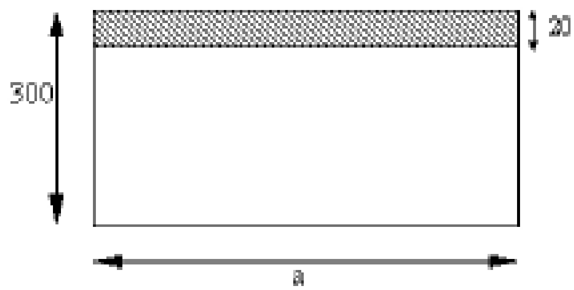
[2] Extraída, traducida y adaptada de **Activités géométriques. Petit X.** Irem de Grenoble, IUFM de Grenoble

A continuación se presentan los planos de varias habitaciones. Las partes no sombreadas serán recubiertas por una alfombra.

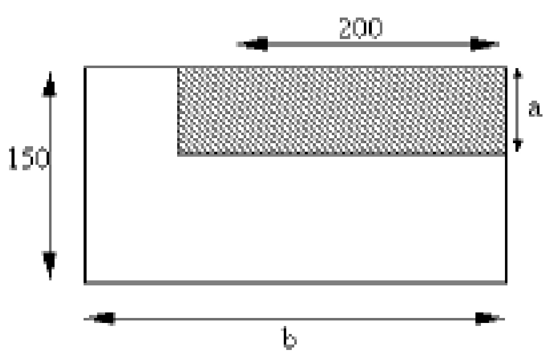
Para cada caso, encuentra la medida del área de la alfombra con la ayuda de las dimensiones dadas.



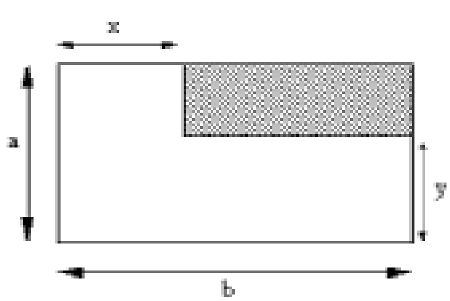
plano n° 1



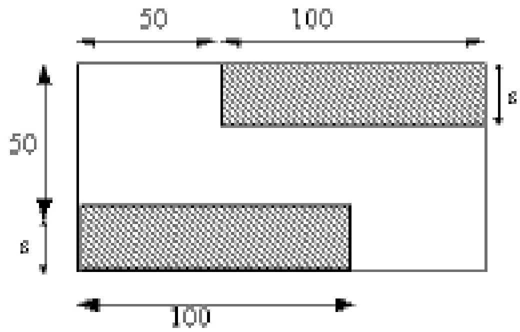
plano n° 2



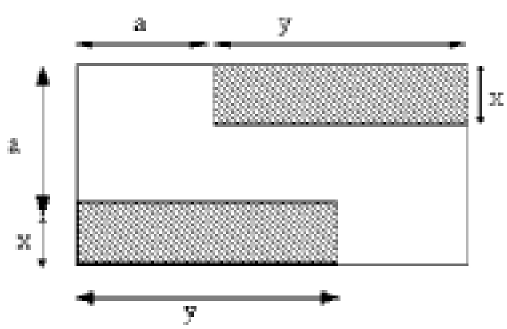
plano n° 3



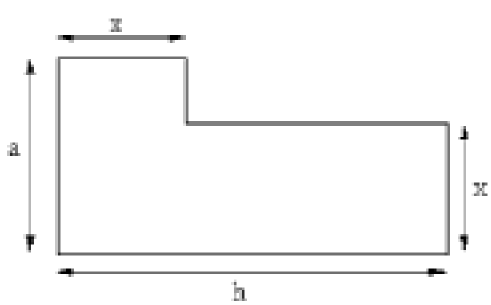
plano n° 4



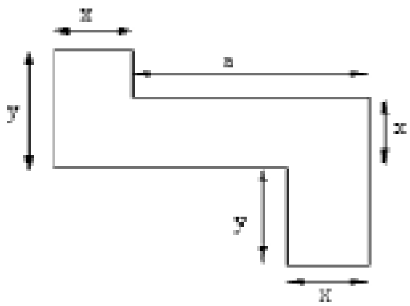
plano n° 5



plan n° 6



plan n° 7



plan n° 8

Volver al inicio

4. Curiosidades matemáticas

Eso no da exacto...[3]

Del "significado" de dividir a números racionales en distintas bases.

20 dividido por 3,"eso no da exacto"..... ¿Quién de entre nosotros no oyó o incluso realizó alguna vez una afirmación de este tipo?

En efecto:

- Para compartir 20 dálmatas entre tres familias adoptivas, resulta fácil dar seis a cada una pero ¿que hacemos con los dos cachorros que restan?
- Para partir 20 metros de tela en pedazos de 3 metros cada uno, una modista puede hacerlo fácilmente y guardará luego el sobrante.
- Para repartir 20 metros de tela entre tres modistas, con seguridad eso no les plantearía grandes dificultades. Bastaría con realizar pliegues en la tela hasta determinar que las tres partes resulten iguales (medirán algo más de 3 m cada una).
- Para transportar 20 toneladas de mercancías con un camión de 3 toneladas de carga útil, ¿cuánto viajes eso requerirá?
- Para compartir 20 tartas idénticas entre tres niños, eso puede hacerse con ayuda de un cuchillo cortando de manera conveniente las tartas.

[3] Este documento ha sido elaborado con el objeto de acercarle al docente una visión amplia acerca del tratamiento de la división desde su funcionamiento interno. Lo invitamos a hacer una lectura reflexiva del mismo, rescatando aquellos aspectos que puedan servirle de herramienta para la dirección de un nuevo proceso de estudio o bien para plantear dudas e inquietudes que den lugar a nuevas producciones para la reflexión y profundización disciplinar

- Para compartir 20 pesos entre 3 niños, ¿cómo hacer si se dispone de un billete de veinte pesos? ¿De cuatro billetes de cinco pesos? De un billete de diez pesos, uno de cinco, dos de dos y una moneda de un peso?

Entonces ¿Es posible resolver 20 dividido por 3?

En realidad, con esta división se presentan problemáticas diferentes.

- Una es completamente discreta y está relacionada con el recuento de elementos que quedan en cada parte. La división se hace sobre objetos indivisibles (caso de los dálmatas). Se trata de la división euclidiana en la cual la igualdad fundamental es $20 = 6 \times 3 + 2$.
- La segunda situación está relacionada con la medida, pero se trabaja con una unidad no convencional (aquí 3 metros tomados como unidad, ya que es lo que se necesita que mida cada corte) y la medida total de la pieza de tela no es un número entero de unidades. La igualdad es la misma que la anterior.
- La tercera sigue relacionada con la medida de lo que debe repartirse (y que es relativa a la unidad elegida, que en este caso sí es una unidad convencional). La división está definida en los $\mathbb{R}^{+*}$ y la densidad de $\mathbb{Q}$ en los $\mathbb{R}$ permite resolver esa división en la práctica. En el ejemplo correspondiente, se considera del racional 20/3.
- El cuarto es un problema común de transporte. En cuanto división, resulta una división particular puesto que el resto es negativo o nulo, ya que puede resultar que la cantidad de mercadería a transportar sea múltiplo de la capacidad real del camión (en cuyo caso el resto es nulo), o bien que no lo sea por lo que siempre en el último viaje nos quedará algo de la capacidad real del camión sin completar (en cuyo caso el resto resulta negativo). La igualdad de esta situación es: $20 = 7 \times 3 - 1$
- En el caso siguiente, los objetos que deben compartirse son divisibles (caso de las tartas) y la división es la articulación de los casos discretos y continuos. La igualdad fundamental es entonces ésta $20/3 = 6\ 2/3$ (lo que significaba convencionalmente $6 + 2/3$ ya que $2/3 \in [0; 1]$.
- En cuanto al último ejemplo, discreto también, la dificultad que presenta es que la unidad que indicaría cómo repartir, no está diferenciada. Cada docente decidirá si conviene adaptar la situación de distintas maneras o no. Estamos poco habituados a tomar en cuenta ese tipo de situaciones en la enseñanza de la Matemática.

En realidad la frase "eso no da exacto" es empleada por los alumnos en un sentido puramente calculatorio: la división, continuada después de la coma, no se detiene ya que el resto no es nunca cero. Continuar con la división después de la coma, tanto como se quiera, tiene sentido sólo si se trata de una cantidad continua (tela o tartas), para las que el racional 20/3 tiene un significado físico.

En situaciones como ésta, toma importancia la base de numeración elegida para la interpretación de la cantidad. En el caso de la base 10, sabemos que la fracción irreducible a/b tiene una escritura decimal (con coma) finita cuando b es divisible solamente por los números primos 2 ó 5 (2 y 5 son los divisores naturales de la base 10).

Si usamos la base 3 para expresar 20/3, tendríamos 202/10 = 20,2; en base 6: 32/3 = 10,4; en base 12: 18/3 = 6,8. Todo número racional puede tener una escritura con coma finita en alguna base de numeración pero no todas las bases de numeración permiten la escritura de todos los racionales con un número finito de cifras después de la coma. Tal el caso de la base 10.

Para los alumnos de EGB 1 e incluso EGB 2, no es posible entrar en un análisis de este tipo sobre las distintas bases de numeración, pero sí es necesario distinguir las actividades de recuento de número de elementos por partes (fenómenos discretos) de las de medida de cada parte en relación a una unidad convencional (fenómenos continuos). Los racionales definidos a partir de los enteros (como soluciones de ecuaciones del tipo bx = a, con (a, b) $\in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)$, no son siempre enteros y no siempre es posible escribirlos bajo forma decimal. De ahí la necesidad de una nueva escritura (a/b).

En cuanto a los números irracionales, no es nunca posible escribirlos bajo forma decimal o racional como su nombre le deja entrever. De ahí la necesidad de usar los nuevos símbolos (radicales, números específicos, como π; etc.).

Para ubicar mejor todos estos números sobre la recta real, es a menudo conveniente conocer valores aproximados (decimales o incluso racionales para los irracionales), encuadrarlos entre valores mayores y menores cada vez más próximos. Estos cálculos resultan cada vez más sencillos con el uso de las calculadoras.

Volver al inicio

Solución a Curiosidad matemática del número anterior:

Seguro que ya te habrás dado cuenta que no se trata de ninguna curiosidad matemática sino que existe un error en el desarrollo presentado, que lamentablemente es bastante frecuente: Si bien es cierto que 1 = (-1) (-1), lo que no es cierto es que $\sqrt{(-1).(-1)} = \sqrt{(-1)}.\sqrt{(-1)}$, puesto que el primer miembro representa un número real mientras que en el segundo miembro tenemos el producto de dos imaginarios. El error radica en que aplicamos a los imaginarios las propiedades de los reales. $\sqrt{-1}$ es un número imaginario. Luego, $\sqrt{-1}$ no es un número real por lo tanto a $\sqrt{-1}.\sqrt{-1}$ no es igual a $\sqrt{(-1).(-1)}$

5. Humor Matemático

Leyes de Murphy para matemáticos[4]:

GENERALES:

1.-Ley de Murphy: "Si algo puede salir mal, saldrá mal"

También conocida como: **Postulado de la tostada con manteca**

"Cualquier tostada untada con manteca al caer al suelo lo hará siempre por la cara untada"

2.-Axioma de Lundfor: "En matemática, ser un experto consiste en saber cada vez más sobre menos cosas"

3.-Corolario de Esturah: "Si se es profesor de matemática se alcanza el saber absoluto sobre casi nada"

4.-Guía de Handy para la Ciencia moderna:

1. Si es verde o se retuerce, es Biología
2. Si apesta, es Química
3. Si no funciona, es Física

5.-Extensiones de Cerf a la Guía de Handy:

4. Si es incomprensible, es Matemática
5. Si no tiene sentido, es Economía o Filosofía

6.-Complemento de Juhbty:

1. Si no se cumple, es Estadística
2. Si sale muy caro, es Economía

Volver al inicio

[4] Extraído de Cronoludia Matemática, de Ismael Roldán y José Muñoz en "Revista Iberoamericana de Educación Matemática. Número 1. año 2005"