REVISTA
MENDOM@TIC@
Año 2 - Número 9 - Julio de 2006

Aportes para la enseñanza de la Matemática de Mendoza

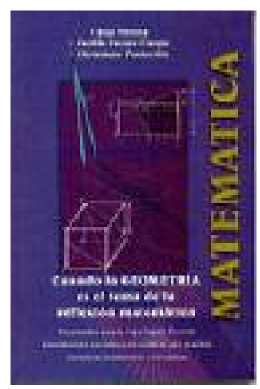
"Una de las pruebas más significativas del valor de un concepto abstracto es lo que tanto él como los resultados que de su uso surgen nos dicen en las situaciones familiares."

— I. N. Herstein

Amigos docentes:
Aquí estamos de nuevo, tratando de continuar el camino iniciado. No siempre se puede estar tan convencido del éxito o del fracaso pero sí en que vale la pena el esfuerzo. Siempre esperamos seguir siendo de alguna utilidad a la hora de enfrentar el trabajo diario de enseñar matemática.

En esta novena edición electrónica encontraremos:

1. **Los contenidos de Matemática: ¿Cómo en un cuento de hadas? (del libro "Cuando la Geometría es el tema de la reflexión matemática" de José Villella y otros)**:



La Geometría es, desde hace muchos años, la Cenicienta del Reino de la Matemática. Esta actitud de desprecio hacia ella no es inherente a los docentes, se manifiesta también en ámbitos donde la Matemática es objeto de estudio e investigación.

Quien haya tenido contacto con la comunidad científica matemática, debe haberse sorprendido la primera vez que oyó que los matemáticos "serios" se dividen en dos grandes grupos: los analistas y los algebristas.

Parece como si sólo el Álgebra y el Análisis Matemático fuesen dignos de recibir la atención de los "genios" matemáticos del siglo XX. Los geómetras son, para algunos, estudiosos "no serios", personas que dedican sus esfuerzos a una rama carente de teorías bien fundamentadas, de aplicaciones dignas de ser tenidas en cuenta, de resultados de interés.

¿Y qué podemos decir de la Teoría de las Probabilidades y la Estadística? ¡Eso ni siquiera es Matemática Pura!... Se trata de Matemática Aplicada, y por lo tanto es una mera herramienta de otras ciencias. Quienes se dedican a estos temas, los estadistas, son todavía menos "serios".

Este tipo de prejuicios es común entre los estudiantes y aún entre los investigadores de las ciencias matemáticas actuales. Por esta causa no debe ser una sorpresa la actitud de muchos docentes de esta ciencia frente a los distintos temas que aborda.

La Geometría es despreciada, dejada de lado, relegada a la última unidad del programa da cada curso, tal como lo fuera la Cenicienta cuando el

Príncipe buscaba la dueña del famoso zapatito de cristal. Debe esperar a que sus hermanas y todas las demás doncellas del Reino demuestren su impotencia para desarrollar y manejar el concepto de espacio, tan importante en los niños y también, por qué no, en los adolescentes. Pero cuando el Príncipe la descubre, cae rendido ante sus encantos... ¿Quién de nosotros no ha quedado prendado alguna vez de la sencillez, la belleza y la riqueza de ideas que es capaz de prodigarnos la intuición geométrica? ¿Quién no se maravilló ante la demostración de alguna propiedad inesperada? ¡Cuántas situaciones problemáticas distintas podemos plantear aplicando conceptos geométricos simples, como por ejemplo el Teorema de Pitágoras!... ¡Cuántos juegos podemos idear utilizando sólo las ideas de punto, recta, plano!...

Pero ¿alguna vez nos hemos planteado cómo hubiera terminado el cuento si la Cenicienta no se hubiera probado el zapatito? ¿Qué hubiera sido de su vida? ¿Y de la del Príncipe? Sin duda ese desencuentro no hubiera conducido a un final feliz... Ella hubiera llorado, conocedora de la verdad; él se hubiera sumido quizá en una enorme melancolía y hubiera buscado y buscado sin cesar... ¿Tenemos nosotros derecho de impedir que nuestros alumnos tomen contacto con la Cenicienta de la Matemática?... ¿Por qué vamos a ocultarles su belleza, sus encantos?...

Las Probabilidades y la Estadística son eso temibles desconocidos que cuando se acercan a nosotros nos infunden un extraño pánico, como si se tratara de las brujas malas del cuento. Tratamos de huir de ellas, de no acercarnos... Si alguna vez nos vemos obligados a hacerles frente, lo hacemos temerosos, seguros de que por no ser "exactas", por poder "fallar", destruirán el hechizo de mostrarnos como docentes infalibles, perfectos, omniscientes...

¿Cómo decir que en un dado todas las caras salen con igual frecuencia, si es posible que lo arrojemos seis, diez, veinte veces y a lo mejor no sale ningún 1?... Perderemos la credibilidad frente a nuestros alumnos...

y si hablamos de la bruja Estadística: sus datos también pueden producir oscuros encantamientos, capaces de distorsionar la realidad; a veces podemos no saber cómo interpretar las muestras estudiadas, qué conclusiones sacar, cómo formalizar los resultados obtenidos, qué inferencias hacer... ¡Qué miedo nos invade ante estas ideas!...

pero, ¿estamos seguros de que se trata de brujas malas? ¿No se tratará acaso de hadas que no son tan bonitas, pero que son buenas, que pueden ayudarnos, quizá su aparente carencia de belleza se deba a que no las hemos idealizado, a que son más mundanas?...

¡Ah! Pero el Álgebra sí es maravillosa... Se trata verdaderamente de la Reina de la Matemática. Su estudio y su enseñanza nos permite mostrarla con su esmerada prolijidad, exactitud y belleza. ¡Nos permite lucirnos a través de ella! Sin embargo no nos damos cuenta de que a veces se comporta despóticamente y nos esclaviza, de la misma manera con que esclavizamos a nuestros alumnos, obligándoles resolver cientos de ejercicios rutinarios que intentamos inútilmente disfrazar de problemas. El Álgebra nos tiraniza año tras año, si la dejamos, obligándonos a rendirle culto y extendiendo su dominación por la mayoría de las unidades de nuestros programas, de las clases del año lectivo. Lo que ocurre es que a veces nos resulta muy fácil explicar la operatoria en un conjunto numérico, de manera mecánica y posteriormente resolver noventa y tres ejercicios, a continuación, por supuesto de los once ejemplos previos.

Debemos sin embargo, descubrir en la Reina Álgebra a una gran aliada que nos da la posibilidad de plantear y resolver problemas de diversa índole. No se trata de una reina mala. Su reinado se extiende a todas las áreas de la Matemática, pero debemos obligarle a actuar como una reina solidaria y bondadosa, que brinda su ayuda, pero impidiendo que se convierta en una reina tirana.

La Cenicienta Geometría debe ser reencontrada, exaltada su belleza y aprovechada su sencillez, al despojarla de sus harapos.

Y en cuanto a las brujas Probabilidades y Estadística, es indispensable que asumamos que no poseen poderes maléficos, sino que pueden ayudarnos a comprender la realidad, permitir que nos vinculemos con datos de cada día. Debemos perderles el miedo, aprender a reconocer en ellas a dos amigas. Es cierto que un experimento probabilístico puede "fallar" aparentemente, pues la probabilidad experimental y la probabilidad teórica no son lo mismo, pero esa falla es también enriquecedora ya que nos da una oportunidad para apreciar esa diferencia, de ver cómo la ciencia exacta actúa con datos no exactos.

Aquí podríamos pensar que estamos dando al cuento un final feliz, pero estamos olvidando a dos protagonistas desconocidos hasta hace poco: las actitudes y los procedimientos. Solemos, al pensar en ellos, verlos como marcianos, como seres de otro planeta, que por un lado imaginamos feos y traviesos, y por otro, sabemos poderosos. Por eso preferimos ignorarlos, dejarlos para los pedagogos y seguir adelante con lo "nuestro". Pero nuestros alumnos están formándolos día a día. Cuando abandonen la escuela, muchos contenidos serán olvidados, sólo sobrevivirá en ello aquello que haya sido realmente interiorizado, la Matemática debe formarles una actitud frente a los problemas de la vida diaria. Si no logramos esto, nuestra labor habrá sido totalmente infructuosa., habremos perdido nuestro tiempo y el de ellos... Debemos enseñarles a comunicarse con estos marcianos, a aprovechar la ayuda que ellos pueden brindarles...

2. Situación didáctica para EGB3

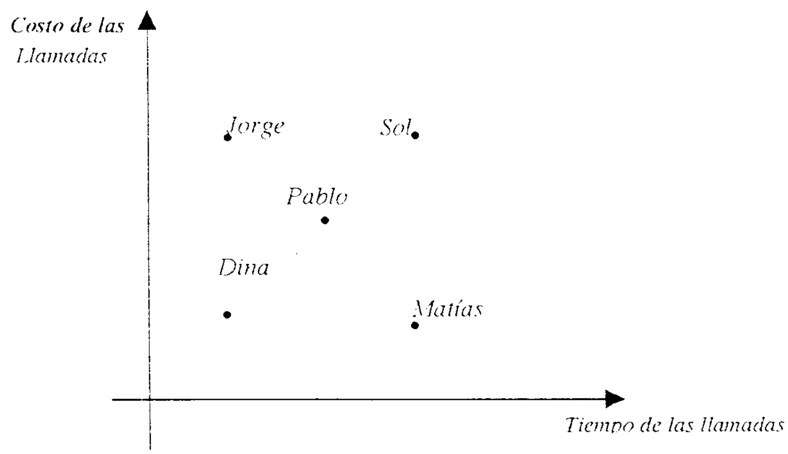
Registros de clases – El costo de las llamadas telefónicas[1]

A continuación presentamos un registro de clase en la que se trabajó a partir de una situación focalizando sobre algunos aspectos vinculados con el concepto de función. En su lectura podrán identificarse características de la presentación del problema y de la gestión de la clase.

Problema presentado:

[1] La actividad fue originalmente extraída del módulo The language of Functions and Graphs de Malcom Swan, editado por Shell Centre de la Universidad de Nottingham, 1985.

"Un fin de semana cinco personas realizan llamadas telefónicas a varios lugares del país. El costo de sus llamadas y la duración del tiempo de las mismas está reflejado en el gráfico:



a) ¿Quién hizo la llamada al lugar más lejano?
b) ¿Quién hizo la llamada al lugar más cercano?
c) ¿Hay personas que hicieron su llamada a lugares situados a la misma distancia?

Expliquen las razones de cada una de las respuestas e indiquen las condiciones que han tenido en cuenta para poder responder.

- Sobre la organización de la clase

En la clase que se describe a continuación, se trabajó en una primera etapa en forma individual, de manera que cada alumno pudiera interiorizarse del problema que se plantea e intentar formarse una idea de posibles respuestas. Luego se formaron grupos pequeños de 2 o 3 alumnos, para resolver el problema.

El período inicial de trabajo individual permitió a los alumnos llegar al grupo con alguna propuesta o con dudas que después se discutieron. Creemos que algunas discusiones no hubieran aparecido si se hubiera trabajado directamente en grupo.

Lo producido por cada grupo fue debatido por toda la clase lo que exigió de cada grupo que busquen una forma de comunicar y justificar sus procedimientos ante sus compañeros.

- Análisis de la clase

En esta clase que relatamos, los alumnos ya trabajaron con sistemas de referencia (en particular coordenadas cartesianas) y han tenido un acercamiento a la lectura e interpretación de gráficos.

Para responder a las preguntas, los alumnos debían establecer relaciones de dependencia entre las variables tiempo y costo, valiéndose de expresiones del tipo "más que", "menos que" o "tantos como", y a la vez, determinar cómo influyen ambas variables en la variación de una tercera: la distancia.

De esta manera, la resolución de la actividad permitiría a los alumnos aproximarse a las ideas de variación y dependencia.

Muchos de los alumnos respondieron correctamente las dos primeras preguntas estableciendo dependencias del tipo:

- *"Dina y Jorge hablaron el mismo tiempo, pero como Jorge pagó más deducimos que Jorge habló a un lugar más lejos que al que habló Dina".*
- *"Como Dina y Matías pagaron lo mismo pero Matías habló más tiempo, entonces Matías habló a un lugar más cercano".*

Como vemos, la información que los alumnos extrajeron del problema no surge de una lectura directa, ya que hacen intervenir una tercera variable que no figura en el mismo. Esto da cuenta de la riqueza de la situación planteada.

Por otro lado, al tener que hacer explícitas las condiciones que se tienen en cuenta para dar las respuestas, aparecieron planteos muy interesantes como por ejemplo:

> *"A lo mejor Dina y Jorge llamaron al mismo lugar pero en horarios diferentes, con tarifas diferentes. ¡A la noche se paga menos!. ¿Cómo puedo saber esto?*

En este caso, y dado que se trata de un problema que apela al aspecto modelizador de la matemática, los alumnos estuvieron debatiendo sobre las condiciones bajo las cuales se elabora un modelo que represente la situación.

En este sentido, tanto las respuestas dadas al principio como ésta última observación son correctas, pero bajo condiciones diferentes. En el primer caso puede suponerse que tanto Dina como Jorge hablaron dentro de una franja horaria en la que el costo de la llamada no varía a causa del horario.

Si no se establecieran condiciones, las preguntas no podrían responderse. Pensamos que si estas discusiones no surgen de parte de los alumnos al responder al problema, el docente debería plantearlas para favorecer el despliegue de un aspecto relevante de la actividad matemática.

En relación con la tercera pregunta, a los alumnos les resulta complejo determinar bajo que condiciones es posible dar una respuesta, a pesar de que implícitamente está presente el tema de la proporcionalidad; el problema esencial es que aparecen dos variables independientes (tiempo y distancia). Algunos de los argumentos que presentan son:

> *Condiciones: "A mayor distancia, mayor costo"*
> *"Cada minuto se cobra x $"*

Los alumnos perciben que estas dos condiciones no se vinculan, planteando:

> *"Si el precio fuera el indicado, no estoy teniendo en cuenta en él la distancia"*

Analicemos otras de las propuestas de los alumnos:

"El minuto es más caro si la llamada es más lejana"

Los estudiantes argumentaban que está implícito en esta expresión que las llamadas se cobran por minuto. Pero a partir de una discusión se concluyó que no es así y que es necesario agregar otra condición:

"Cuanto más tiempo se habla, más se paga"

En la clase, al llegar a esta instancia, todos los alumnos coincidían en que con estas dos condiciones era posible responder a la pregunta c). Se hizo entonces necesaria la intervención del docente:

"A ver si entiendo lo que ustedes quieren decir: es posible que uno hable a un lugar 10 minutos y pague $2 y que luego hable al mismo lugar 30 minutos y pague $3". ¡No! – dijeron los alumnos – "tiene que pagar $6".

El docente remitió a los alumnos a la segunda condición argumentando que su propuesta cumple con la misma: hablé más tiempo y pagué más.

"¡Pero debe ser proporcional!" – dijeron casi todos –.

La discusión continuó hasta precisar las condiciones requeridas.

Al finalizar la clase el docente destacó las características del problema e identificó, a partir de las afirmaciones surgidas, aquellas que deseaba que los alumnos retengan para reutilizarlas en otras situaciones.

Por último, propuso reflexionar sobre otras dos cuestiones:

a) ¿Tiene sentido unir de alguna manera los cinco puntos representados?
b) ¿Dónde situarías una llamada efectuada al mismo lugar que la llamada de Matías pero de duración doble que ésta?

La discusión sobre la cuestión puede hacer emerger la concepción de que siempre los puntos de un gráfico se deben unir.

En este caso la unión de los 5 puntos ni siquiera tiene sentido, pero para responder a la segunda pregunta se debe unir el origen con el punto que representa la llamada de Matías.

3. Curiosidades matemáticas

Las variaciones del tiempo

Fijemos nuestra atención sólo en un elemento: si el tiempo es nublado o despejado; es decir, distinguimos los días por el hecho de si en el cielo hay nubes o no. En estas condiciones, ¿habrá muchas semanas con diferente combinación de días nublados y despejados?

Puede parecernos que éstas serán pocas y que pasados unos dos meses se agotarán todas las combinaciones de días nublados y despejados, repitiéndose entonces a la fuerza alguna de las combinaciones ya observadas. Mas, probemos a calcular exactamente el número posible de combinaciones que pueden darse en estas condiciones, esto es, intentemos responder a la siguiente pregunta:
¿De cuántas formas distintas pueden combinarse los días nublados y despejados en una misma semana?

Solución en el próximo número ....

Solución al problema del número 8

El problema de los Cuatro Colores

El problema presentado en el número anterior es famoso en Matemática y tiene una fascinante historia.
Es un teorema que tuvo a los matemáticos muchos años sin encontrar la solución. Y se planteó de la siguiente manera: supongamos que uno tiene un mapa cualquiera. La pregunta es: "¿cuál es la mínima cantidad de colores que hace falta para colorearlo?".

La Conjetura de los Cuatro Colores surgió históricamente cuando Francis Guthrie era estudiante de una universidad en Londres. Uno de sus profesores era Augustus De Morgan. Francis le mostró a su hermano Frederick (que también había sido estudiante de De Morgan) una conjetura que tenía con respecto a la coloración de unos mapas, y como no podía resolver el problema, le pidió a su hermano que consultara al renombrado profesor.

De Morgan, quien tampoco pudo encontrar la solución, le escribió a Sir William Rowan Hamilton, en Dublín, el mismo día que le hicieron la pregunta, el 23 de octubre de 1852:

"Un estudiante me pidió que le diera un argumento sobre un *hecho* que yo ni siquiera *sabía que era un hecho, ni lo sé aún ahora.* El estudiante dice que si uno toma una figura (plana) cualquiera
y la divide en compartimentos pintados con diferentes colores, de manera tal que dos adyacentes no tengan un color en común, entonces él sostiene que *cuatro colores* son suficientes".

Hamilton le contestó el 26 de octubre de 1852 y le dijo que no estaba en condiciones de resolver el problema. De Morgan continuó pidiendo asistencia a la comunidad matemática, pero nadie parecía encontrar una respuesta. Cayley, por ejemplo, uno de los matemáticos más famosos de la época, enterado de la situación, planteó el problema a la Sociedad de Matemática de Londres, el 13 de junio de 1878, y preguntó si alguien había resuelto la Conjetura de los Cuatro Colores.

El 17 de julio de 1879, Alfred Bray Kempe anunció en la revista *Nature* que tenía una demostración de la Conjetura. Kempe era un abogado que trabajaba en Londres y que había estudiado matemática con Cayley en Cambridge. Cayley le sugirió a Kempe que enviara su Teorema al *American Journal of Mathematics*, donde fue publicado en 1879. A partir de ese momento, Kempe ganó un prestigio inusitado y su demostración fue premiada cuando lo nombraron Miembro de la Sociedad Real (Fellow of the Royal Society) en la que actuó como tesorero por muchísimos años. Es más: lo nombraron

"Caballero de la Reina" en 1912. Kempe publicó dos pruebas más del ahora Teorema de los Cuatro Colores, con versiones que mejoraban las demostraciones anteriores.

Sin embargo, en 1890 Percy John Heawood encontró errores en las demostraciones de Kempe. Si bien mostró por qué y en dónde se había equivocado Kempe, Heawood probó que con *cinco colores alcanzaba para colorear cualquier mapa.* Kempe aceptó el error ante la sociedad matemática londinense y se declaró incompetente para resolver el error en la demostración, *su* demostración.

Todavía en 1896, el famoso Charles De la Vallée Poussin encontró también el error en la demostración de Kempe, ignorando aparentemente que Heawood ya lo había encontrado antes.

Heawood dedicó sesenta años de su vida a colorear mapas y a encontrar potenciales simplificaciones del problema (la más conocida dice que si el número de aristas alrededor de cada región es divisible por 3, entonces el mapa se puede colorear con cuatro colores), pero no pudo llegar a la prueba final. El problema seguía sin solución. Muchos científicos en el mundo le dedicaron buena parte de sus vidas a probar la Conjetura sin suerte. Y obviamente, hubo mucha gente interesada en probar lo contrario. Es decir: encontrar un mapa que *no se pudiera colorear con cuatro colores.*

Recién en 1976 la Conjetura tuvo solución y pasó a ser, nuevamente, el Teorema de los Cuatro Colores. La demostración corrió por cuenta de Kenneth Appel y Wolfgang Haken, quien con el *advenimiento de las computadoras* lograron probar el resultado. Ambos trabajaban en la Universidad de Illinois en Urbana, en la localidad de Champaign. Usaron más de 1.200 horas de las computadoras más rápidas que había en la época para poder demostrar la conjetura. Tanto es así, que el Teorema de los Cuatro Colores es uno de los *primeros casos* en la historia de la matemática, en donde la computadora ha tenido una incidencia tan fuerte: permitió que un resultado que venía evadiendo a los matemáticos durante más de un siglo fuera resuelto. Naturalmente, la demostración trajo gran desazón en el mundo de la matemática, no porque se esperara que el resultado fuera falso (en realidad, todo lo contrario) sino porque era el primer caso en donde la máquina (en algún sentido) estaba superando al hombre. ¿Cómo no poder encontrar una demostración mejor? ¿Cómo no poder encontrar una demostración que no dependiera de un agente externo? Es que los cálculos más optimistas establecen que, para poder comprobar lo que hicieron Appel y Haken "a mano", por una persona que le dedicara 60 horas por semana, necesitaría ¡*cien mil años*! para cumplir con la misma tarea. Los detalles de la demostración fueron publicados en dos "papers" que aparecieron en 1977.[37] Y lo notable de esto fue que *los seres humanos,* dos en este caso, lograron reducir el problema a *casos, muchos casos,* que quizás hubieran tomado varias vidas para comprobar.

4. <u>Humor Matemático</u>

EL PROBLEMA DE LA PAPA

La reforma de la enseñanza nos interesa a todos, un grupo de docentes ha examinado la cuestión del enunciado de un problema.

REVISTA MENDOM@TIC@
Año 2 - Número 9 - Julio de 2006

Plan de 1960:
Un campesino vende una bolsa de papas por 1000 pesos. Los gastos de producción se elevan a 4/5 partes del precio de venta. ¿Qué beneficio obtiene?

Enseñanza tradicional, 1970:
Un campesino vende una bolsa de papas, por 1000 pesos. Los gastos de producción se elevan a 4/5 partes del precio de venta, es decir, a 800 pesos. ¿Qué beneficio obtiene?

Enseñanza moderna, 1970:
Un campesino establece una correspondencia, F entre un conjunto P de papas y un conjunto M de monedas. El cardinal del conjunto M es igual a 1000 y cada elemento PFM vale una peso. Dibuja 1000 puntos gordos que representen los elementos del conjunto G de los gastos de producción contiene 200 elementos menos que el conjunto M y da respuesta a la pregunta siguiente: ¿cuál es el cardinal del conjunto B de los beneficios? (Dibuja este conjunto en rojo).

Enseñanza renovada, 1990:
Un pallés kapitalista privilejiao s'anrequesío injuttamente de 200 mangos con una volza d'papas, hanalisa el testo y busca las fartas d'ortografía, de sintasi y de puntuasion y cuenta de que tu piensas de su manera de s'enriquesé.

Enseñanza reformada, 1996:
Un agricultor, vende una bolsa de papas por 1000 pesos. Los gastos de producción se elevan a 800 pesos y el beneficio es de 200 pesos.
Tarea: subraya, la palabra "papas" y discútela con tu compañero.

Enseñanza asistida por computadora, 2000:
Un productor del espacio agrícola en red de área global peticiona un data-bank conversacional que le displaya el day-rate de la papa. Después se baja un software computacional fiable y determina el cashflow sobre pantalla de mapa de bits (bajo MS-DOS, configuración floppy y disco rígido de 40 megabytes).
Dibuja con el ratón el contorno integrado 3D de la bolsa de papas.
Después haces un log-in a la Red por 36.15 código BP (Blue Potatoe) y sigues las indicaciones del menú.

Enseñanza futura, 2010:
¿Qué es un campesino?

Adaptado por Federico Martín Maglio
http://www.fmmeducacion.com.ar/Humor/papas.htm

Nos vemos en la próxima.......

Esperamos sugerencias y reflexiones con respecto a este número

REVISTA MENDOM@TIC@
Año 2 - Número 9 - Julio de 2006

Bibliografía

Universidad Nacional de Quilmes. Licenciatura en Educación.

Chemello, G., Díaz, A., Diñeiro, M. T. y otros. (1996). Matemática, metodología de la enseñanza, Partes I y II, Programa PROCIENCIA de CONICET, Bs. As., Conicet.

Chemello, G., Díaz, A., Diñeiro, M. T. y otros. (1997). Matemática, modelos didácticos, Programa PROCIENCIA de CONICET, Bs. As., Conicet.

Chemello, G., y otros. (1997). Los CBC y la Enseñanza de la Matemática. Bs As. AZ Editora.

Collado, L; del Campo, E . Doc. Curricular área Matemática para EGB 2 DGE- 2002- Mendoza

Collado, L; del Campo, E. Compendio de material para capacitación en EGB – área Matemática- DGE- 2003. Mendoza

Corso, L. y La Menza, A. (1992). La Matemática del Conflicto al Diálogo. Reflexiones sobre su enseñanza como hecho comunicativo en el Tercer Ciclo de la EGB. Ed. Aique

Guzmán R, I. Apuntes de Didáctica de la Matemática. Curso de Magíster en Enseñanza de las Ciencias con mención en Didáctica de la Matemática- Universidad Católica de Valparaíso- 1999- Chile

Jorba, J., Sanmartí, N. (1994). Enseñar, Aprender y Evaluar: Un proceso de Regulación Continua. Propuestas didácticas para las áreas de Ciencias de la Naturaleza y Matemática. Barcelona

Macnab, D., Cummine, J. (1992). La Enseñanza de las Matemáticas de 11 a 16. Un enfoque centrado en la dificultad. Ed. Visor.

Miller, C. Matemática: Razonamiento y aplicaciones. Editorial Addison Wesley Longman- 1999- México

Parra C. Y Saiz, I. (1994). Didáctica de la Matemática, aportes y reflexiones. Buenos Aires. Paidós.

Santaló, L. La Geometría en la formación de profesores- Red Olímpica- 1993- BsAs

Y. Perelman . Algebra recreativa
http://fisicarecreativa.net/algebrarecreativa/algebrarecreativa01.html

Páginas web: www.educ.ar Sitio educativo del Estado Argentino

www.mineduc.cl Ministerio de Educación de Chile