DiNIECE Dirección Nacional de Información y Evaluación de la Calidad Educativa

Ministerio de Educación Presidencia de la Nación

LAS LETRAS, LAS ECUACIONES Y LAS FUNCIONES

REFLEXIONES SOBRE SU ENSEÑANZA Y ANALISIS DEL TRABAJO DE LOS ESTUDIANTES EN LAS EVALUACIONES NACIONALES

AUTORIDADES

PRESIDENTA DE LA NACION
DRA. CRISTINA FERNÁNDEZ DE KIRCHNER

MINISTRO DE EDUCACIÓN
PROF. JUAN CARLOS TEDESCO

SECRETARIO DE EDUCACIÓN
PROF. ALBERTO SILEONI

SECRETARIO DE POLÍTICAS UNIVERSITARIAS
DR. ALBERTO DIBBERN

SECRETARÍA DEL CONSEJO FEDERAL DE EDUCACIÓN
PROF. DOMINGO DE CARA

SUBSECRETARÍA DE EQUIDAD Y CALIDAD
PROF. SUSANA MONTALDO

SUBSECRETARIO DE PLANEAMIENTO EDUCATIVO
LIC. OSVALDO DEVRIES

SUBSECRETARIO DE COORDINACIÓN ADMINISTRATIVA
ARQ. DANIEL IGLESIAS

SECRETARIO GENERAL DEL CONSEJO FEDERAL DE EDUCACIÓN
PROF. DOMINGO DE CARA

DIRECTORA EJECUTIVA DEL INSTITUTO NACIONAL DE EDUCACIÓN TECNOLÓGICA
PROF. MARÍA ROSA ALMANDOZ

DIRECTORA EJECUTIVA DEL INSTITUTO NACIONAL DE FORMACIÓN DOCENTE
PROF. MARÍA INÉS ABRILE DE VOLLMER

DIRECTOR NACIONAL DE INFORMACIÓN Y EVALUACIÓN DE LA CALIDAD EDUCATIVA
LIC. EDUARDO ARAGUNDI

COORDINADORA DE EVALUACIÓN DE LA CALIDAD EDUCATIVA

MG. MARIELA LEONES

ELABORADO POR

PROF. ANDREA NOVEMBRE

ASISTENTE TÉCNICA

PROF. NATALIA RIVAS

1. INTRODUCCIÓN

Las resoluciones de los problemas por parte de los alumnos, correctas o no, así como las omisiones de las respuestas, nos proveen datos para el análisis de algunas características del estado de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Este análisis, unido a numerosísimas investigaciones didácticas que se han desarrollado a lo largo de las últimas décadas, nos permitirá, por un lado, pensar sobre algunas situaciones del día a día en el aula y, por el otro, plantear propuestas de enseñanza para algunos contenidos puntuales.

Proponemos, en este escrito, centrarnos sobre dos ejes, sin pretender ser exhaustivos:

☑ Las letras y las ecuaciones

☑ Las funciones

Queremos señalar que el análisis se hará desde una postura respecto de cómo entendemos que se aprende y se enseña matemática. A decir de Guy Brousseau:

"Saber matemática no es solamente aprender definiciones y teoremas para reconocer el momento de utilizarlos y aplicarlos; sabemos que hacer matemática implica ocuparse de problemas. Sólo se hace matemática cuando nos ocupamos de problemas, pero se olvida a veces que resolver un problema no es más que una parte del trabajo; encontrar buenas preguntas es tan importante como encontrar soluciones. Una buena reproducción por el alumno de una actividad científica exigiría que intervenga, que formule, que pruebe, que construya modelos, lenguajes, conceptos, teorías, que los intercambie con otros, que reconozca los que están conformes con la cultura, que tome los que le son útiles, etc."[1]

Las actividades de enseñanza deberían propiciar, habilitar en los alumnos las actividades señaladas en el párrafo anterior. Estas no son simples de describir, y ni siquiera pensamos que sea posible, pero a lo largo de este escrito pensaremos sobre algunas de las características de la actividad docente que favorecen el tipo de trabajo matemático deseado.

1. LAS LETRAS Y LAS ECUACIONES

1.1 La enseñanza de las letras, la generalidad y la traducción entre lenguajes

Habitualmente, la escuela primaria está vinculada con la aritmética y los números, mientras que la escuela media se relaciona con el álgebra, el trabajo sobre lo general y, por lo tanto, el uso de letras. Sin embargo, no es posible hacer un corte tajante entre un tipo de

[1] Brousseau, Guy (1986) (2)

trabajo y el otro, sino que sería más apropiado hablar de una transición.

"(…) ¿Es posible hablar de álgebra cuando se trabaja con números? No podemos responder esta pregunta de manera absoluta, pero debemos decir que a veces sí. Muchos alumnos usan números de forma general, como si estuvieran usando letras. Hacen razonamientos que funcionan para un número cualquiera, pero lo plantean para un caso particular.

Pensemos en un alumno que frente a la pregunta "¿Qué ocurre al sumar tres números enteros consecutivos?" plantea: $16 + (16 + 1) + (16 + 2) = 3\times16 + 3$ y afirma que el resultado es siempre un múltiplo de 3. Si bien el razonamiento se basa en un ejemplo numérico, el número con el que trabaja podría reemplazarse por cualquier otro, ya que lo que hace que pueda decidir que el resultado es múltiplo de 3 es el uso de las relaciones entre números consecutivos y la lectura de la información que porta la escritura $3\times16 + 3$. Dicha lectura implica saber que un número multiplicado por 3 es un múltiplo de 3 y que la suma de dos múltiplos de 3 es un múltiplo de 3. Creemos que el razonamiento es lo suficientemente general como para considerarlo "casi algebraico".

De hecho, nosotros muchas veces analizamos ejemplos numéricos con el objetivo de generalizar. ¿Estamos haciendo álgebra en este caso?

Lo que es cierto es que la comunicación de un resultado se realiza de manera general, lo que provoca que muchas veces se oculte la búsqueda que llevó a él y para ello hay que usar letras. En ese caso se piensan las letras como un lenguaje compartido por una comunidad."[2]

Cerca del final de la escuela primaria y en el inicio de la escuela media se les propone a los alumnos trabajar con ecuaciones como una posible entrada al trabajo algebraico. Su enseñanza generalmente se basa en el pasaje de términos o a través de la aplicación de la propiedad uniforme (haciendo la misma operación a ambos miembros de la igualdad). Para lograr el dominio de la técnica, se proponen una considerable cantidad de ecuaciones para su resolución. Generalmente, antes de presentarlas en un problema, se hace un trabajo cuyo objetivo es el de traducir expresiones coloquiales al lenguaje simbólico y viceversa, que es lo que se necesita saber para modelizar una situación contextualizada.

Desde el punto de vista didáctico, la enseñanza de la traducción entre el lenguaje coloquial y el simbólico plantea un problema. Se enseña antes de que los alumnos tengan la oportunidad de necesitarlo. Como consecuencia, se les dificulta reconocer las ocasiones de uso de esta herramienta.

Un típico problema que se propone en clase es, por ejemplo, traducir la expresión $2x+1=9$ al lenguaje coloquial.

En general, se espera que la traducción se haga en términos de dobles y siguientes de números, para lo cual es necesario restringir el conjunto numérico con el que se trabaja. Si el número x no es entero, entonces no tiene sentido hablar de su siguiente. Sin embargo, no es

[2] Itzcovich, H. y Novembre, A. (2007)

habitual encontrar este dato en la consigna de un problema de este tipo.

Si x es un número entero, efectivamente 2x es su doble y 2x + 1 el siguiente de su doble, y el problema afirma que éste número debe valer 9. Si el siguiente del doble de un número es 9, el doble del número es 8 y el número es la mitad de 8.

El problema también admite otra manera de ser resuelto, igualmente válida. A saber: si x es un número entero, también lo es 2x y 2x+1 es el siguiente de ese número. Si el siguiente de un número es 9, el número es 8 y como la expresión correspondiente a él era 2x, el valor correspondiente a x es 4.

Los dos razonamientos llevan a encontrar el valor de x. En uno de los casos se expresan todas las relaciones en una sola frase. En el otro, se lo hace en dos.

Es interesante señalar que en ambos casos el valor de x pudo encontrarse fácilmente sin necesidad de resolver la ecuación. La traducción sirvió para resolver una ecuación sin aplicar técnica alguna (despejes, propiedad uniforme). La traducción per se no permite vislumbrar ninguna utilidad para ella.

Otra cuestión que es interesante poner en discusión es la frase "la traducción". ¿Cuál es la traducción de 2x + 1 = 9, si x es un número entero?

¿Que el siguiente del doble de x es 9?

¿Que el siguiente de un número es 9?

¿Que el siguiente de un número par es 9?

¿Que un número impar es 9?

¿Que un número que tiene resto 1 al ser dividido por 2 es 9?

Todas las expresiones anteriores derivan de la ecuación 2x + 1 = 9. Por eso creemos que no es posible hablar de "la" traducción del enunciado al lenguaje coloquial. Creemos que es más pertinente hablar de la información que porta la expresión, que es mucha y que uno decide cuál quiere leer en función del problema que necesita resolver.

Más adelante daremos algunas propuestas para la enseñanza del uso de las letras y la lectura de la información que porta una expresión.

1.2 Las Ecuaciones

Generalmente, la definición de ecuación que se propone es la de "una igualdad con una incógnita". Frente a esto nos preguntamos si cada una de las siguientes expresiones son igualdades y/o ecuaciones:

$5x - 4 = 16$

$5x - 4 = 5x + 2$

$5x - 4 = 5x - 2 - 2$

Al no conocer el valor de x, no es posible decir si $5x - 4 = 16$ es o no una igualdad. Por ejemplo, si x vale 0, la expresión se transforma en $-4 = 16$, que es una igualdad falsa. En cambio, si x vale 4, se obtiene $16 = 16$, o sea una igualdad verdadera. Luego, la ecuación $5x - 4 = 16$ se transforma en una igualdad verdadera para un único valor de x ($x = 4$, en este caso) –y no nos detendremos en este momento a analizar la unicidad de este valor-, mientras que para infinitos valores de x es una igualdad falsa.

En cuanto a la expresión $5x - 4 = 5x + 2$, podemos decir que si x es un número, también lo es 5x y nunca puede obtenerse el mismo resultado restando 4 o sumando 2 al mismo número. Entonces, no importa por qué valor se reemplace a x, siempre se obtiene una igualdad falsa.

En cuanto a $5x - 4 = 5x - 2 - 2$, las expresiones de ambos miembros son equivalentes, por lo que cualquier valor que reemplace a x producirá una igualdad verdadera.

Los tres ejemplos propuestos son ecuaciones, sin embargo:

- $5x - 4 = 16$ no es una igualdad. ¿Cómo saber si $5x - 4$ será igual a 16 sin reemplazar a x por un número? Al hacerlo, la expresión se transformará en una igualdad que puede ser verdadera (si se obtiene 16) o falsa (si no se obtiene 16). Los valores de x para los que la expresión se convierte en una igualdad verdadera constituyen su conjunto solución. En este caso particular, el conjunto solución de esta ecuación tiene un solo elemento, $x = 4$.
- $5x - 4 = 5x + 2$ es una expresión que, para cualquier valor de x, se transforma en una igualdad falsa. Se trata de una ecuación cuyo conjunto solución es vacío. Esta conclusión puede obtenerse a partir de analizar la expresión, "leerla", o transformando la ecuación en otra equivalente donde se vea más fácilmente que no hay solución. Por ejemplo:

  $5x - 4 = 5x + 2$ es equivalente a $5x - 5x - 4 = 2$ y a $0.x = 6$

  La última ecuación dice que se busca un número que multiplicado por 0 da 6 por resultado, lo cual es imposible. Si ésta ecuación no tiene solución (no hay ningún valor de x que la satisfaga), tampoco tendrá solución ninguna de las ecuaciones equivalentes a ella.

- 5x – 4 = 5x – 2 – 2 se convierte en una igualdad verdadera para todo valor de la variable. El conjunto solución de la ecuación son todos los números.

En cuanto a la definición de "una igualdad con una incógnita", no es posible hablar de una igualdad cuando interviene una variable. Las ecuaciones se convierten en igualdades verdaderas o falsas una vez que la o las variables se reemplazan por números.

En este sentido, una ecuación puede definirse como una función proposicional: al reemplazar sus variables por números se transforma en una proposición que puede ser verdadera o falsa.

La mayoría de los alumnos vincula la incógnita con un "número a develar". En ese sentido "Ellos (los alumnos) parecen sostener que una ecuación **es**[3] una igualdad entre números en la que la x está "tapando" a **un**[4] número que interviene en la expresión. La ecuación sería entonces una proposición –la afirmación de una igualdad- y no una función proposicional."[5]

La noción de incógnita pareciera ser la de algo que "existe", de un número que hay que encontrar. Esta concepción de la letra deja afuera a las ecuaciones sin solución y a las que tienen infinitas soluciones, ya que en ninguno de estos casos hay "un número para encontrar". Entonces, el sentido que los alumnos van construyendo de la noción de ecuación, a partir de los problemas que tienen la posibilidad de resolver, es limitado, o al menos incompleto.

Cuando se habla de pasaje de términos o de aplicar la propiedad uniforme queda oculta una cuestión importante: que las transformaciones que se pueden hacer a una ecuación son las que conservan el conjunto solución. Son ecuaciones **diferentes** que **tienen las mismas soluciones**. Por ejemplo, 8x + 2 = 26 tiene el mismo conjunto solución que 8x = 24 y que x = 3, aunque las tres ecuaciones son diferentes. Se trata, entonces, de transformar las ecuaciones de modo tal que mantengan el mismo conjunto solución y éste pueda leerse fácilmente.

Es interesante analizar que no siempre es necesario llegar a una expresión del estilo x = k (donde k es un número real) para resolver una ecuación. Teniendo en cuenta que resolver una ecuación significa hallar el o los valores de la variable que hacen verdadera la igualdad (si es que existen), en el ejemplo anterior es posible determinarlo a partir de la ecuación 8x = 24. No resulta complicado determinar que el valor x = 3 es el único que hace verdadera la igualdad. Esto no

---

[3] Las negritas son nuestras.
[4] En este sentido, si la x está tapando a un número, entonces ese número tiene que existir.
[5] Panizza, M., Sadovsky, P, Sessa, C. (1996)

significa que no haya que llegar al "último paso", sino que creemos que un debate de este tipo puede ser rico para plantear en una clase con el objetivo de poner en discusión qué significa resolver una ecuación y qué hacemos para resolverla.

En el ejemplo anterior, las ecuaciones

$$8x + 2 = 26$$

$$8x = 24$$

$$x = 3$$

son todas equivalentes y el conjunto solución de cada una de ellas es $\{3\}$. Es importante hacer notar a los alumnos que $x = 3$ también es una ecuación que en el conjunto de los números reales tiene una sola solución.

En el proceso de enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones se da una situación paradojal en varios sentidos:

- ☑ Al ser una herramienta nueva, las ecuaciones que se les pueden proponer a los alumnos para resolver son demasiado simples. Esto hace que, muchas veces, ellos puedan resolverlas aritméticamente con los <u>mismos</u> procedimientos que usaban en la escuela primaria y no utilizando las técnicas que les han enseñado en la escuela media.

  Esto contradice la lógica de funcionamiento de muchas clases, donde los problemas que los profesores dan se resuelven con lo que se acaba de aprender, lo cual puede ser una fuente de confusión para algunos estudiantes. Los objetos de enseñanza de la escuela media suelen ser casi siempre nuevos para los alumnos. No es habitual que encuentren formas alternativas de resolución diferentes a las que proponen los docentes, lo que sí ocurre con las ecuaciones. Y esto se debe a los problemas, no al contenido.

- ☑ Muchos alumnos primero resuelven los problemas aritméticamente y luego los traducen a ecuación porque, esto último, es "lo que el profesor quiere". No comprenden – y con razón - por qué sus métodos de resolución no sirven, lo cual es falso. No han tenido la oportunidad –y deberían haberla tenido- de trabajar con problemas que les muestren las limitaciones de las resoluciones aritméticas y las ventajas de las algebraicas. Recordemos que cualquier persona seguirá usando las técnicas conocidas hasta tanto no se muestre que no sirven, y eso es tarea del docente.

- ☑ Si los alumnos logran resolver algunos de los problemas sin usar ecuaciones, que es lo que les acaban de enseñar, no logran entender cuáles son los problemas que esta herramienta permite resolver, para qué sirve. Si no logran delimitar "el campo de acción" de las ecuaciones, entonces no sabrán cuándo usarlas, que es un conocimiento fundamental para cualquier objeto matemático.

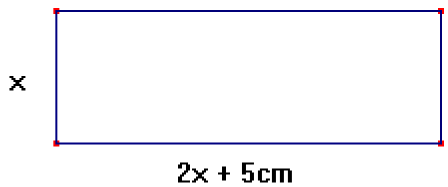
1.3 Análisis de un problema y las resoluciones de los alumnos.

Para estudiar con más detalle las concepciones de los alumnos, analizaremos un ejemplo de un problema que se propone de modo habitual y diferentes resoluciones realizadas por alumnos de 9º año (o 2 º año de escuela media, según la región).

Se trata de un problema similar a un ítem abierto incluido en un ONE[6]. Las soluciones que presentamos fueron tomadas de las que los alumnos propusieron para él.

Problema

El perímetro del rectángulo de la figura es de 40 cm. Encontrá las medidas de sus lados.



Análisis del problema

No es simple hacer un análisis de un problema porque depende de muchos factores, pero podemos hacer una descripción acerca de cómo, cuándo y para qué es usado habitualmente:

- ✓ Generalmente, los conocimientos previos que se consideran para plantear a los alumnos situaciones similares a estas son:
  - Traducción del lenguaje coloquial al simbólico y viceversa.
  - Definición de ecuación.
  - Técnicas de resolución de ecuaciones: pasaje de términos o bien aplicación de la propiedad uniforme.
- ✓ Con todo el bagaje de conocimientos anteriores, se espera que los alumnos sean capaces de plantear una ecuación que

[6] Operativo Nacional de Evaluación

modelice el problema y la resuelvan. En principio, hay al menos dos posibilidades:

- Usar que la suma de los 4 lados del rectángulo es igual al perímetro:

  $x + x + 2x + 5 + 2x + 5 = 40$ ó $2x + 2.(2x + 5) = 40$

- Usar que la suma de 2 lados consecutivos es igual a la mitad del perímetro.

  $x + 2x + 5 = 20$

✓ Este tipo de problema no suele ser un problema de aprendizaje de ecuaciones, sino uno de aplicación. Se trabajan luego de haber desarrollado todos los contenidos referidos a ecuaciones y habitualmente se consideran como otra oportunidad para practicar resolución de ecuaciones y traducción entre lenguajes.

✓ Los profesores no solemos tener en cuenta las resoluciones aritméticas en nuestros análisis. Por un lado, es una forma de resolución que nos resulta "lejana", pero por el otro, a veces nos resulta difícil comprender que un alumno vuelva a usar una herramienta que supuestamente ha sido reemplazada por otra. Ahora bien, este es un punto a discutir. *¿Por qué un alumno dejaría de usar una forma de resolución conocida, que le resulta simple y es adecuada para resolver un problema? ¿Por qué la cambiaría por otra forma de resolución que aún está aprendiendo, con la que no se siente del todo seguro, y que además no le resulta necesaria?*

Resoluciones de alumnos. Nuestro Análisis

Como ya hemos señalado, el problema del ejemplo no fue tomado en una evaluación ONE, pero las respuestas que proponemos para analizar están inspiradas en resoluciones reales de alumnos a problemas similares a este. Las hemos elegido porque se repiten en cantidades considerables y creemos que pueden aportar a comprender las concepciones de los estudiantes.

Si bien hay muchos que resolvieron correctamente este problema, nos parece que los errores que cometieron nos pueden dar información valiosa sobre sus concepciones.

1) El alumno logra escribir una ecuación casi correcta que modeliza el problema. Sin embargo, la resuelve a través de un algoritmo -pasaje de términos- que no le permite controlar ni tener una retroalimentación sobre su acción.

2x+5cm.2+x.2=40 cm	2 . 1,33+5cm.2+1,33.2 =
2x+5cm.2+x = 40 cm:2	2,66+5cm.2+1.33.2 =
2x+5cm+x=20:2	7,66 cm.2+1,33.2=
2x+x=10-5	15,32 cm + 1,33.2=
3x = 5	16,65 cm.2=
x = 1,33	33,3 cm

El trabajo algorítmico con ecuaciones con una cantidad finita de soluciones tendría una "salida", que es verificar si cada una de ellas efectivamente lo hace. Pero este no suele ser un trabajo habitual en la escuela, o, cuando se trabaja, queda relegado a algo no importante, molesto.

Este alumno, si bien reemplaza el valor obtenido en la ecuación original, el hecho de no obtener el resultado esperado no le hace descartar su solución. En este caso, la verificación está vacía de sentido: el alumno no comprende para qué sirve.

La verificación de las soluciones de las ecuaciones es evidentemente una práctica habitual en la clase a la que pertenece este alumno. Sin embargo, está ausente el conocimiento central: para que un valor de la variable sea solución de una ecuación tiene que transformarla en una igualdad verdadera para ese valor. Esta afirmación no solo es válida para la ecuación original sino para las ecuaciones que se obtienen en cada uno de los pasos de la resolución debido a que son equivalentes entre sí, esto es, todas tienen el mismo conjunto solución.

Luego, la verificación no solo permite saber si el o los valores hallados son realmente soluciones de la ecuación, sino que además, en caso de no serlo, sirve para saber en qué paso se cometió el error.

2) Este es un ejemplo de una modelización correcta donde un "error" hace que el alumno no pueda continuar resolviéndola.

Per$_{\square}$ = L.2 + L.2
" = (2x + 5 cm).2 + x.2 = 40 cm
" = (4x + 10 cm) + x^2 = 40 cm
" =
" =

La confusión entre 2x y x^2 transforma a la ecuación en cuadrática, que no forma parte de los conocimientos de un alumno de este nivel de escolaridad.

Todos nosotros reconocemos este tipo de error en los trabajos de nuestros alumnos y pareciera que nada de lo que hacemos o decimos sirve para que dejen de cometerlo.

Si los estudiantes confunden sistemáticamente la potenciación con el producto entre la base y el exponente, entonces es necesario que se proponga como objeto de reflexión en la clase. Pero, ¿de qué modo?

Una práctica habitual para nosotros, los profesores, frente a este error suele ser proponer a los alumnos un contraejemplo para mostrar la falsedad de la propiedad. Así, nos encontramos diciendo, por ejemplo: "Chicos, ¿ven que 3^2 no es lo mismo que 3×2?", que es suficiente para demostrar que es falso que 2x es equivalente a x^2.

Sin embargo, el contraejemplo no es suficiente para los alumnos porque si lo fuera dejarían de confundir 2x con x^2 y sabemos que no es así. Hay aquí un malentendido respecto de la fuerza de los contraejemplos como elementos necesarios y suficientes para refutar la validez de una proposición.

John Mason[7] señala que:

"Cuando los profesores o los autores proponen un ejemplo para los alumnos, su experiencia es en general completamente diferente a la que tiene la audiencia. Para el profesor el ejemplo es un ejemplo de algo; es un caso particular de una noción más general. (…) Para el alumno, el ejemplo es una totalidad. No lo ve ilustrando una generalidad, sino como algo completo en sí mismo. Los elementos que para el profesor son instancias particulares, para muchos alumnos son indistinguibles de otros elementos del ejemplo. La tarea de los alumnos es reconstruir la generalidad a partir de los casos particulares que les son ofrecidos. Muchas veces los alumnos hacen esto brillantemente pero de manera inapropiada, porque sin quererlo hacen hincapié en aspectos en los cuales el maestro no hace y viceversa.

(…)

Si un profesor pone "ejemplos" en el pizarrón o un autor pone "ejemplos" en un libro, ellos permanecen como textos no diferenciados hasta que un alumno los constituye como ejemplos de *algo, y eso puede ser hecho solamente al ver lo general a través de lo particular. Entonces surge la cuestión acerca de si la generalidad del estudiante es la misma que la del autor. Muchas confusiones de los alumnos son literalmente aquello: fusiones de cosas que no estaban previstas fusionar (por el maestro o por el autor) que llevan a una gran variedad de errores, el estudio de los cuales constituye una proporción significativa de las investigaciones y las publicaciones en educación matemática."*

[7] Mason, John, (1996)

Pero no solo los ejemplos son una fuente de malos entendidos. Creemos que hay un conocimiento que los docentes corren el riesgo de naturalizar y los alumnos no siempre tienen: **<u>dos expresiones son equivalentes si lo son para todos los valores de sus variables</u>**. Cuando los profesores les dan a sus alumnos un ejemplo donde 2x da un resultado diferente a x^2 están suponiendo que ellos comparten este saber. Cuando no lo saben, entonces el ejemplo no les informa que esas expresiones no son equivalentes.

Luego, creemos que es necesario hacer un trabajo sobre la equivalencia de expresiones. Es interesante relacionarlo con las ecuaciones: **si dos expresiones son equivalentes, entonces la ecuación que se obtiene al igualarlas tiene por solución a todos los valores posibles para sus variables.**

Volviendo al problema anterior, un problema interesante consiste en buscar para qué valores de x, 2x es igual a x^2. Resulta que:

$$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x.(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ó } x = 2$$

En este caso, las expresiones 2x y x^2 solo son iguales para dos valores de la variable, entonces no son equivalentes. Analizar cuándo son iguales permite decidir que no lo son siempre.

Sabemos de los tantos errores recurrentes de los alumnos de la escuela secundaria, pero nada ganaremos con quejarnos. Creemos oportuno correr el centro de atención hacia nosotros, los profesores, y buscar formas de tratar con estos errores. No se trata de volver a enseñar de la misma forma cada uno de los contenidos en los que se equivocan, sino de retomarlos para reflexionar sobre ellos. Se vuelve desde otro lugar, para poner lo aprendido en discusión.

El caso de 2x y x^2 es un ejemplo y lo mismo podría hacerse con otros errores que se detecten. Una cuestión importante es que una vez que se discuta en la clase, habrá que prestar especial atención a cómo registrar los puntos más importantes del debate y su conclusión.

3) Algunos alumnos proponen planteos correctos, algunos de los cuales están bien resueltos y otros no. Por ejemplo:

$2x + 2.(2x + 5) = 40$

$2x + 4x + 10 = 40$

$6x = 40 - 10$

$x = 30 : 6$

$x = 5$

En este caso, aunque la respuesta no es correcta, es interesante la forma en que el alumno elije modelizar la situación:

$x = 40 – (2x + 5\ cm).2 – x$
$x = 40 – 4x + 10\ cm – x$
$x + 4x + x = 40 + 10\ cm$
$6x = 50\ cm$
$x = 8,33\ cm$

4) En muchos casos los alumnos usan una relación correcta para el perímetro de un rectángulo, pero lo igualan a la suma de los ángulos interiores de la figura.

Podría pensarse que este alumno sabe que el perímetro de una figura se obtiene sumando todos sus lados, que sabe que la suma de los ángulos interiores de un rectángulo es 360° y sabe resolver ecuaciones. Sin embargo, al igualar estas cantidades, está mostrando que hay algo muy importante que no sabe y que se vincula con varias cuestiones. Está igualando magnitudes diferentes, ¿se desprendió del problema y se trata de un desliz o es un problema más grave? ¿Cómo saberlo?

Como docentes tenemos la posibilidad de interactuar con nuestros alumnos para poder indagar cómo pensaron un problema, para poner en discusión sus procedimientos y llegar a conclusiones. La interacción (grupal o no) es una forma de operar sobre las creencias de los estudiantes.

$2.(2x + 5) + 2x = 360$
$4x + 10 + 2x = 360$
$6x = 360 – 10$
$6x = 350$
$x = 58,3$

5) En varios casos, duplican el lado de medida x pero no el que mide 2x+3. Tal vez sea porque al estar x multiplicada por 2 es posible que los alumnos crean que toda esa medida está ya duplicada.

Nuevamente, la resolución incorrecta está basada en un algoritmo vacío de sentido para este alumno.

$2x + 5 + x\ .\ 2 = 40$
$2x + x = 40 : 2 – 5$

3x = 15
x = 15 : 3
x = 5 El lado menor mide 5 cm

6) Si bien los docentes esperan que los alumnos resuelvan este tipo de problemas con ecuaciones, ellos muchas veces lo hacen aritméticamente.

5 + 5 = 10
40 – 10 = 30
30 : 2 = 15 cm
Los lados miden 3 cm, 3 cm, 15 cm y 15 cm

Otros alumnos proponen soluciones más coloquiales:

Al perímetro (40) le resto los dos 5 cm de los lados más largos y me queda 30 cm. Es la suma de todas las x que son 6, entonces x es 30 : 6, 5 cm.
Rta: 5 cm

7) La incompleta conceptualización de las ecuaciones hace que los alumnos no logren identificar las que tienen infinitas soluciones y "acomoden" los resultados que obtienen para que les quede algo conocido.

2x + 5 cm = 2x + 5 cm
2x – 2x = 5 cm – 5 cm
x = 0
2 . 0 + 5 cm = 5 cm
Suma de los lados mayores: 5 cm + 5 cm = 10 cm
40 cm – 10 cm = 30 cm
30 cm: 2 = 15 cm
Rta: Longitud del lado menor = 15 cm

8) Un párrafo aparte lo merecen aquellos planteos que parecen no tener sentido, que no pueden interpretarse desde el problema que se propone resolver.

Para algunos docentes, estos alumnos tienen dificultades para comprender los enunciados. Sin embargo, las investigaciones muestran que las dificultades están ligadas a la interpretación de datos y a la relación entre los datos y el pasaje al cálculo.[8]

Es decir que la modelización de un problema a través del álgebra es una tarea compleja, que no se reduce a una simple interpretación de un enunciado. Requiere entenderlo, poder extraer de él sus datos relevantes, darse cuenta cuál es la pregunta que se está haciendo, buscar algún tipo de relación entre los datos y finalmente escribir la o las ecuaciones que modelizan el problema. Luego de este proceso se está en condiciones de intentar resolverlo.

La complejidad que encierra la modelización es de una magnitud suficiente como para que los alumnos no tengan que aprender a hacerla solos. Tiene que ser un objeto de enseñanza en la escuela.

La enseñanza de la modelización sería tema de un largo escrito, por lo que solo plantearemos algunas cuestiones para comenzar a pensar:

- ✓ La modelización es un contenido de un orden diferente a, por ejemplo, la función lineal. No es directamente enseñable a través de un discurso del docente porque es imposible atrapar todas sus características o definirla de manera precisa.
- ✓ Es posible reflexionar sobre diferentes maneras de modelizar problemas y las ventajas y desventajas de cada una. La reflexión, junto a una buena selección de problemas, permite que los alumnos vayan configurando un panorama sobre cómo se modelizan diversas situaciones.
- ✓ El investigador danés Mette Andresen[9] asegura que hay que tener en cuenta la problemática de la autenticidad de los modelos. Ésta habrá que tratarla a través de una transición que va desde los problemas ficticios de los libros de texto, que sobre-simplifican las situaciones, hasta los verdaderos modelos del mundo real.

  La matemática escolar necesariamente impone restricciones, ya que solo pueden considerarse algunos contenidos. Sin embargo, hay "acuerdos implícitos" entre el docente y sus alumnos por

[8] Claudine Mary (2003)
[9] Andresen, Mette (2007)

los cuales hay que evitar darles problemas tan simples que hagan que se sientan desvalorizados.

Hay otro concepto que también nos ayuda a interpretar las soluciones aparentemente inexplicables de nuestros alumnos.

Guy Brousseau definió la noción de "CONTRATO DIDÁCTICO" como un conjunto de normas que rigen las relaciones entre el profesor y el alumno. Estas determinan -explícitamente en parte, pero sobre todo implícitamente- lo que cada protagonista, el docente y el alumno, tiene la responsabilidad de administrar y de lo que será responsable frente al otro. De este sistema recíproco de obligaciones, considera aquello que es específico del contenido matemático a enseñar y aprender.

Algunas reglas generales del contrato didáctico[10] de la escuela media son:

- ☑ Los problemas se resuelven a partir de fórmulas, directa o indirectamente.
- ☑ Los datos necesarios para resolverlo están en el enunciado. Si alguno falta, se podrá calcular con los que sí están.
- ☑ Los problemas que plantea el docente son para que los alumnos aprendan y apliquen conceptos matemáticos.
- ☑ El profesor enseñará todo lo que considera necesario para aprender cada contenido. Luego, será tarea del alumno estudiarlo.
- ☑ Si el docente se da cuenta de que un alumno no sabe cómo resolver los problemas, va a tener un mal concepto de él. Por eso, al alumno no le conviene mostrarle a su profesor que tiene dificultades.
- ☑ Los problemas tienen respuestas que el docente conoce. El alumno siempre tiene que intentar responder. Si su solución no es correcta, el profesor le dirá o la corregirá.

Muchos malos entendidos tienen origen en fallas en el contrato didáctico. Los alumnos, para poder transitar por la escuela, necesitan aprobar y, para eso, tienen que adaptarse a la propuesta de un docente. El grupo clase y el profesor *negocian*, a partir de la interacción, las normas que regirán el contrato. Pero, como ya hemos dicho, la mayoría de estas normas permanecen implícitas, por lo que no es raro que haya alumnos que no las interpreten correctamente. Frente a esto, los alumnos sienten que están ante un profesor del que

[10] Por supuesto, estas reglas no describirán a todos los contratos vigentes en cada clase. Solo se trata de una descripción muy general, estereotipada, tomada en cuenta a fines de discutir algunas cuestiones importantes referidas a los contratos didácticos y sus efectos sobre la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.

“nunca se sabe qué quiere”[11], lo que produce mucha incertidumbre y enojo. Estas situaciones pueden desembocar en un abandono del estudio de la matemática (al menos por ese año)[12] y, en otros casos, en el fracaso escolar.

Hay casos intermedios, donde los alumnos tienen su interpretación del contrato –incorrecta- que no han puesto en duda y resuelven los problemas a partir de lo que consideran que hay que hacer. Las dos resoluciones que proponemos creemos que entran en esta categoría.

$x = 2x + 5$

$-5 = 2x – x$

$-5 = x$

En este caso, el alumno puede haber evocado algún problema anteriormente resuelto donde se pedía que el cuadrilátero sea un cuadrado, aunque la solución que se obtuvo no es posible para ese contexto. Los alumnos que responden “por contrato” no siempre responden desde la lógica del problema, sino que muchas veces lo hacen desde lógicas que nos resultan incomprensibles. Aún cuando se les repregunta acerca de su razonamiento, la mayoría de ellos no pueden reproducir el pensamiento que los llevó a él.

$2x + 5 = 0$

$x = -5 – 2$

$x = -7$

En este caso, es posible que el alumno solo haya planteado una ecuación porque reconoce que es un problema de los que se resuelve con esa herramienta. La razón por la que plantea esta ecuación y no otra permanece en el ámbito de lo privado. No tenemos acceso a las razones que lo llevaron a escribir esto.

Las ecuaciones anteriores pueden interpretarse como soluciones de alumnos que responden a lo que creen que se espera de ellos, sin importar si son o no correctas. Es probable que estos mismos alumnos sean capaces de hallar la solución con otros métodos, pero no los usan por no creerlos apropiados.

[11] Henry, Michel, 1991.

[12] Estamos haciendo una simplificación del análisis, pero sabemos que el abandono del estudio tiene muchas otras causas. La mala interpretación del contrato didáctico es solo una de ellas, y creemos que los profesores tienen que tenerla en cuenta a la hora de analizar las producciones de sus alumnos.

La falta de experiencia en la búsqueda de soluciones hace que los alumnos tengan que buscar elementos externos al aprendizaje para resolver problemas, especialmente los más flojos. La investigadora Claudine Mary[13] afirma que *"Buscar indicios en las palabras del docente es una manera de no hacer, de no jugar el juego de la resolución. (...) La alumna buscaba en las **palabras de introducción** de la tarea indicios de lo que tenía que hacer. (...) La alumna estará siempre, hasta el final, a merced de los cambios de entonaciones y gestos del docente."*

Todos reconocemos en la descripción anterior a muchos de nuestros alumnos y sabemos cuán difícil es trabajar con ellos. Nos parece importante disponer de una interpretación posible de algunos errores, aunque no se adapten a todos los alumnos. Esto nos permitirá analizar, en cada caso, qué tipo de intervención será más conveniente.

2x + 5	
x + 5 : 2	
x + 2,5	
x = 2,5	El lado menor tiene 2,5 de longitud

En este caso, ni siquiera se trata de una ecuación, pero el alumno opera con la expresión como si lo fuera. Se trata de otra muestra de la pobreza del concepto de ecuación que manejan.

1.4 ¿Qué tipos de problemas abonan a la construcción del sentido de lo algebraico?

Si bien no es posible hacer un "catálogo" de los tipos de problemas que ayudan a los alumnos a constituir un panorama de lo algebraico, podemos plantear alguno y analizarlo.

Actividad

Sin hacer la cuenta, decidí cuál es el resto de dividir $15 \times 3 \times 12 + 5$ por 15, por 6, por 5 y por 4.[14]

[13] Claudine Mary, 2003. Op. Cit.
[14] Problema tomado de: Matemática 7. Serie Al Fin de Cuentas. Editorial Tinta Fresca. (2006).

Al impedir que se haga la cuenta, se está inhibiendo una resolución aritmética del problema, que solo consistiría en hacer el cálculo, dividir el resultado por 15 y hallar el resto. El tipo de actividad matemática involucrada es muy básico, y solo consiste en hacer divisiones para hallar sus restos.

Es necesario entonces que los alumnos busquen otras estrategias de resolución. El tipo de trabajo que ellos sean capaces de desplegar dependerá de muchos factores, uno de los cuales es el conocimiento y otro es el tipo de trabajo que están habituados a desarrollar. En función de ellos, el profesor tendrá que evaluar con mucho cuidado los momentos en los cuales intervenir y qué tipo de información dar, para que las decisiones sigan quedando a cargo de los alumnos.

Una opción que brinda el álgebra es la de leer la expresión dada para poder obtener información sobre ella.

Veamos cuál es una de las posibles formas de resolver el problema:

Para la primera pregunta, $15\times3\times12 + 5$ puede leerse como un múltiplo de 15 más 5. Luego, el resto de la división por 15 es 5. Notemos que esa información se pierde al hacer la cuenta.

La noción de resto que se pone en juego aquí es la de la cantidad de unidades que un número excede a un múltiplo de 15, sin llegar al próximo. Se trata de una definición provisoria que más adelante podrá precisarse.

En el caso de la segunda pregunta, para hallar el resto al dividir la expresión dada por 6, se agrega una dificultad, que es $15\times3\times12$ no contiene a 6 como factor. Se plantea entonces la necesidad de reescribirla de manera que el múltiplo deseado aparezca:

$15\times3\times12 + 5 = 15\times3\times2\times6 + 5$.

La transformación permite leer que el número excede en 5 unidades a un múltiplo de 6. Luego, el resto de la división es 5.

Para la tercera pregunta, y con el objetivo de determinar el resto de la división por 5, basta con observar que ambos términos son múltiplos de 5 y tener en cuenta que la suma de múltiplos de 5 es un múltiplo de 5.

$15\times3\times12 + 5 = 5 \times 3 \times 3 \times 12 + 5$

Entonces, al dividir la expresión por 5 el resto es 0.

Para decidir si es múltiplo de 4 procedemos en forma análoga. Como $15\times3\times12 + 5 = 15\times3\times3\times4 + 5$, el número dado excede en 5 a un múltiplo de 4, lo que equivale a decir que excede en 1 al siguiente múltiplo de 4.

Una transformación de la expresión permite mostrarlo:

$15\times3\times3\times4 + 5 = 15\times3\times3\times4 + 4 + 1 = 4\times (15\times3\times3 + 1) + 1$

Luego, el resto de la división por 4 es 1.

Si bien en la resolución de este problema sólo se utilizan expresiones numéricas, el tipo de razonamiento es algebraico. Las transformaciones de las escrituras se necesitan para leer información que en la escritura inicial no era legible, lo que constituye una utilidad: **no se transforman las expresiones a pedido del docente sino porque resulta necesario**.

En el marco aritmético las relaciones no son relevantes, se ocultan en el resultado de la cuenta. En el marco algebraico, en cambio, se "leen" las relaciones que brinda la cuenta o se la transforma para identificar otro tipo de relación.

Por supuesto, la lectura de relaciones requiere de conocimiento. Asimismo, es el conocimiento el que permite darse cuenta de que una transformación permitirá mostrar nuevas relaciones.

La transformación en una escritura equivalente permite decidir acerca de la divisibilidad o no de un número por otro, pero accediendo a razones que los criterios de divisibilidad ocultan.

Resolver un problema es esencial para analizarlo y analizarlo es fundamental antes de llevarlo al aula. Esto nos permite adelantarnos a algunas de las posibles dificultades que puedan tener los alumnos (aunque sabemos que es imposible predecir todo) y pensar en intervenciones que les permitan avanzar. Además, a partir del análisis podemos establecer cuáles son los objetivos del problema, decidir cuáles son las conclusiones que permite desarrollar y qué queremos que quede registrado en las carpetas.

Sin el análisis previo, dependemos de lo que se nos ocurra en la situación de clase. A veces, nos dejamos llevar por las discusiones del momento y perdemos el objetivo central del problema. Otras veces, no sacamos todo el provecho que podríamos de un problema por no haber analizado previamente toda su potencialidad.

1.5 ¿Demostrar sin letras?

Analicemos la siguiente afirmación: "Si m es un número entero, ¿cuáles son los restos posibles al dividir m^2 por 5?"

Una "mente algebraica" rápidamente intentaría buscar una expresión para m^2 a partir de m. Para ello es necesario hacer ciertas hipótesis: por ejemplo, si m es un número entero cualquiera, entonces puede escribirse como m = 5k + r, donde k y r son números enteros y $0 \leq r < 5$. Entonces,

$m^2 = (5k+r)^2 = 25k^2 + 10kr + r^2 = 5 \cdot (5k^2 + 2kr) + r^2$

La expresión anterior muestra que m^2 es la suma de un múltiplo de 5 y r^2. Un análisis apresurado podría llevar a afirmar que el resto de dividir a m^2 por 5 es r^2, lo cual es "parcialmente verdadero": si r = 1, $r^2 = 1$; si r = 2, $r^2 = 4$, y en ambos casos r^2 es el resto de dividir m^2 por 5. Sin embargo, si el valor de r es, por ejemplo, 4, r^2 es 16, que no puede ser el resto de una división por 5. Es necesario analizar qué sucede para cada valor posible de r, lo cual es posible porque solo son cinco:

Como $m^2 = 5.p + r^2$, donde $p = 5k^2 + 2kr$, se obtiene:

r	$m^2 = 5.p + r^2$	Resto al dividir m^2 por 5
0	$m^2 = 5.p$	0
1	$m^2 = 5.p + 1$	1
2	$m^2 = 5.p + 4$	4
3	$m^2 = 5.p + 9 = 5.p + 5 + 4$	4
4	$m^2 = 5.p + 16 = 5.p + 15 + 1$	1

Entonces, los restos posibles al dividir m^2 por 5 son 0, 1 ó 4. Este resultado no hubiese sido fácil de obtener solo a partir del análisis de las expresiones literales.

Algunas afirmaciones generales pueden ser demostradas analizando su validez para cada uno de los valores de su dominio cuando éste es finito. Muchas veces, en este tipo de situaciones, el uso de letras complica el análisis.

Luego, es importante presentar a los alumnos problemas similares a este para que tengan una oportunidad de debatir acerca de ciertos límites en el uso de las letras. Saber cuándo no conviene usarlas completa el sentido del álgebra y de lo literal.

1.6 ¿Cómo hacer que las letras sean necesarias?

En el apartado donde tratamos el tema de ecuaciones dijimos que era necesario que los alumnos tengan la oportunidad de resolver problemas donde las letras y/o ecuaciones resulten necesarias. De esta manera, los alumnos podrán ir conformando un panorama de situaciones donde las letras resultan herramientas útiles.

Proponemos el siguiente problema[15] referido a cuadrados mágicos en los que se pueden usar números enteros.

Problema de los Cuadrados Mágicos

En los cuadrados mágicos que proponemos a continuación, la suma de todas las filas, columnas y diagonales debe ser la misma. Los

[15] Tomado de Arcavi, Abraham, 1994.

casilleros deben completarse con números enteros y ellos pueden repetirse.

a) Complete los casilleros vacíos a fin de obtener un cuadrado mágico con la suma de 9.

	3	
2		1

b) Complete el siguiente cuadrado mágico donde la suma es 6.

	2	
1		5

c) Complete el cuadrado mágico siguiente para el cual la suma es 8.

	4	
2		2

d) ¿Siempre es posible completar el cuadrado mágico? Explique por qué.

Análisis[16]

La resolución de este problema se inicia sin dificultades, debido a que se cuenta con los datos necesarios para poder llenar todos los casilleros de los dos primeros cuadros.

[16] Agradecemos el aporte de la Prof. Cecilia Lamela en el análisis de esta situación.

Sin embargo surgen dificultades al intentar completar el último cuadro, que no siempre son evidentes en un primer momento. Para que se vean las contradicciones es necesario verificar que al llenar este cuadro, no todas las sumas dan 9.

Por ejemplo,

2		2
4	4	0
2		2

→ Al completar este casillero a partir de la segunda fila, resulta 0, mientras que si se lo hace a partir de la última columna, se obtiene 4. Esto nos informa que este cuadrado mágico no tiene solución. Los casilleros tienen que dar el mismo resultado sin importar desde dónde se los mire.

¿Por qué no se pudo llenar?

En este momento, el docente debería plantear la pregunta: ¿por qué los dos primeros pudieron completarse pero este no? Según la experiencia matemática que tengan los alumnos, verá cómo propone el trabajo, pero es importante que tengan un tiempo de exploración para poder elaborar hipótesis.

¿Cómo se formula una hipótesis?

Comienza entonces un proceso de revisión de lo ya resuelto intentando analizar cuáles pudieron haber sido las causas que posibilitaron el llenado o no del cuadrado mágico. Ahora bien, debido a la ubicación de los datos y a que uno de ellos es la suma -que no siempre es tenida en cuenta en el análisis-, este proceso suele ser complejo en varios sentidos: cuando se cree haber encontrado una condición para poder llenar o no el cuadrado es necesario ponerla a prueba, lo cuál abre otro problema. ¿Cómo se hace para saber si una hipótesis es verdadera o no? Generalmente, el primer intento consiste en probar con un ejemplo numérico, pero cuando no se obtiene el resultado deseado, resulta difícil volver a empezar.

Desde el punto de vista didáctico, el docente tiene que estar preparado en el momento de la puesta en común para proponer contraejemplos para las hipótesis erróneas.

La exploración numérica no es la más adecuada y aunque se encuentre un ejemplo que "verifique" la hipótesis planteada, nada puede asegurar que sea válida siempre.

Se trata de un problema que pone un límite a lo numérico, muestra la insuficiencia de mirar los ejemplos dados para buscar qué hay de general en ellos y al mismo tiempo brinda un contexto para el uso de letras.

Algunas de las hipótesis que proponen los alumnos y sus respectivos contraejemplos son:

<table>
<tr><th>Hipótesis</th><th>Contraejemplo</th></tr>
<tr><td>“Los dos números de abajo tienen que ser iguales.”</td><td><table><tr><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td>5</td><td></td></tr><tr><td>1</td><td></td><td>1</td></tr></table>Suma = 15</td></tr>
<tr><td>“Los números de de abajo tienen que ser iguales y el del medio, el doble.”</td><td><table><tr><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td>6</td><td></td></tr><tr><td>3</td><td></td><td>3</td></tr></table>Suma = 18</td></tr>
<tr><td>“La suma tiene que ser un múltiplo de 3.”</td><td><table><tr><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td>4</td><td></td></tr><tr><td>2</td><td></td><td>5</td></tr></table>Suma = 9</td></tr>
</table>

Los cuadros propuestos en cada caso pueden llenarse, lo que lleva a los alumnos a intentar buscar otra hipótesis o darse por vencidos. En el último caso no puede ser completado porque la hipótesis es parcialmente correcta. Este es el momento en el que el profesor puede sugerir el uso de letras y, seguramente se tendrá que hacer cargo de mostrar cómo llegar a encontrar una condición de llenado del cuadro.

Búsqueda de una condición usando letras

Todos los cuadros tienen los datos ubicados en las mismas casillas y podemos suponer que esos valores son a, b y c. El otro dato es la suma del cuadrado mágico, que podemos simbolizar a través de S. El cuadrado resulta,

	a	
b		c

La idea consiste en intentar completar los lugares vacíos en función de a, b, c y S y, desde allí, intentar analizar condiciones.

Se podría comenzar por completar analizando la última fila y las dos diagonales, para lo cual es necesario tener en cuenta que su suma es S:

S – a - c		S – a – b
	a	
b	S – b - c	c

Luego, usando que la primera y la última columna tienen que sumar S es posible encontrar dos valores más:

S – a - c		S – a – b
a + c - b	a	a + b - c
b	S – b - c	c

Para que el cuadrado esté bien completo, los tres valores de la segunda fila tienen que sumar S:

$a + \cancel{c} - \cancel{b} + a + a + \cancel{b} - \cancel{c} = S$

3a =S, es decir que la suma tiene que ser el triple del número del medio

Si continuamos completando el cuadro usando, por ejemplo la segunda columna, obtenemos:

S – a - c	b + c - a	S – a – b
a + c - b	a	a + b - c

b	S – b - c	c

Para que los datos del cuadro permitan su llenado, la suma de los elementos de la primera fila también tiene que ser S:

$S - a - \cancel{c} + \cancel{b} + \cancel{c} - a + S - a - \cancel{b} = S$

$2S - 3a = S$

S = 3a, que vuelve a ser la misma relación.

Por lo tanto, la condición para que un cuadrado pueda completarse es que la suma sea igual al triple del número del medio. Eso es lo que no sucede en el caso c) de la actividad, donde la suma es 8 y el valor del medio es 4.

Es interesante señalar que el llenado del cuadro solo depende del número del medio y no de los otros dos. Es decir, que b y c pueden tomar cualquier valor, mientras que el valor de S depende del valor que tenga a.

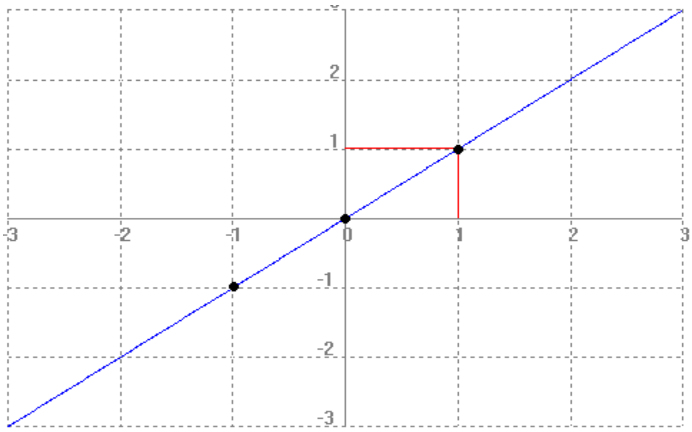
En este problema aparecen las letras de un modo potente para arribar a una relación a la que resultaría muy difícil llegar sin ellas. Por otro lado, la demostración de su validez es casi imposible si no se recurre al álgebra. Las letras, en este caso, están al servicio de la búsqueda de una condición.

2. Funciones

Habitualmente, se enseñan las funciones lineales afirmando que su fórmula responde a la forma f(x) = mx + b, donde m y b son números reales y que su gráfica es una recta. Se dice que m es la pendiente de esta recta y que su valor da cuenta de la inclinación, mientras que el valor de b es la ordenada al origen, y es la ordenada del punto donde la función corta al eje y.

No es habitual que en el aula ni en los libros de texto se desarrolle un trabajo acerca de por qué una función cuya fórmula responde al modelo anterior necesariamente tiene por gráfica una recta. Tampoco hay, en ese momento, un trabajo que limite una generalización que los alumnos tienden a hacer: que todas las gráficas de funciones son rectas. Es así que cuando se les presenta una función cuya fórmula es, por ejemplo, $f(x) = x^3$, los alumnos arman una tabla con algunos valores y los unen con una recta:

X	$f(x) = x^3$
1	$1^3 = 1$
0	$0^3 = 0$
-1	$(-1)^3=-1$



El trabajo con las funciones lineales también puede transformarse en algorítmico. Los alumnos disponen de una lista de fórmulas y, según los datos del problema, tienen que elegir entre ellas. Pero el margen de decisión es mínimo cuando las situaciones que resuelven son similares a otras que ya han resuelto y les sirven de modelo.

Así, por ejemplo:

Si se quiere hallar la ecuación de una recta no vertical conociendo su pendiente m y un punto (x_0,y_0) que contiene, la fórmula es $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$.

Si se quiere hallar la ecuación de una recta no vertical conociendo su ordenada al origen b y un punto (x_0,y_0) que contiene, la fórmula es $y = \frac{y_0 - b}{x_0} \cdot x + b$, con $x_0 \neq 0$.

Si se quiere hallar la ecuación de una recta no vertical conociendo dos puntos que contiene (x_0,y_0) y (x_1,y_1), la fórmula es $y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \cdot (x - x_0)$, con $x_1 \neq x_0$.

En las carpetas no solo suelen verse las fórmulas, sino también ejemplos de cómo usar cada una de ellas. El trabajo de los alumnos se reduce a encontrar cuál de los ejemplos se parece al que tiene que resolver, que nada tiene que ver con hacer matemática.

Sin embargo, problemas similares a los anteriores pueden resolverse sin usar las fórmulas, aritméticamente y con una base más conceptual.

Por ejemplo, para hallar la ecuación de la recta de pendiente 3 que pasa por el punto (2 , 5) falta encontrar la ordenada al origen, que es la ordenada del punto donde la recta corta al eje y.

Si la pendiente es 3, las ordenadas aumentan 3 unidades por cada unidad que aumentan las abscisas. También puede decirse que las ordenadas disminuyen 3 unidades por cada unidad que disminuyen las abscisas. Luego, a partir del punto (2, 5), para llegar al punto de abscisa 0 es necesario disminuir la primera coordenada en 2 unidades, lo cual hace disminuir las ordenadas en 2 × 3 = 6, obteniendo un valor de 5 – 6 = -1. La recta pasa por el punto (0 , -1) y su ordenada al origen es -1, luego su ecuación es y = 3x – 1.

Si se quiere hallar la recta que pasa por los puntos $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ y $(\frac{2}{3}, 1)$, puede tenerse en cuenta que las abscisas de los puntos aumentaron de $\frac{1}{2}$ a $\frac{2}{3}$, que es $\frac{1}{6}$ de unidad, mientras que las ordenadas disminuyen de 1 a $\frac{3}{2}$, que es $\frac{1}{2}$ unidad. Luego, si en $\frac{1}{6}$ de unidad las ordenadas disminuyen $\frac{1}{2}$ unidad, en 1 unidad disminuirán 6 × $\frac{1}{2}$ = 3 unidades por lo que la pendiente es -3.

Usando el valor de la pendiente, como es negativo resulta que las ordenadas aumentan 3 unidades cuando las abscisas disminuyen 1 unidad. A partir del punto $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, para llegar al punto de abscisa 0 es necesario disminuir $\frac{1}{2}$ unidad, por lo que las ordenadas tienen que aumentar $\frac{3}{2}$ de unidad, que es la mitad de la pendiente debido a que se consideró media unidad en las abscisas en lugar de una:

$\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3.$

La ordenada al origen es 3 y la ecuación de la recta es y = -3x + 3.

2.1 Gráficos de funciones

Tradicionalmente, el trabajo con las funciones se hacía a partir de su fórmula y el trabajo gráfico se limitaba a la producción de la gráfica de una función dada su fórmula.

El investigador Claude Janvier propone un trabajo con la noción de función que tenga en cuenta su riqueza y complejidad. Uno de sus focos es la traducción entre diferentes modos de representación de la función: descripción verbal, tabla numérica, gráfico y fórmula, teniendo en cuenta todas las combinaciones posibles.

Para que estas traducciones sean posibles de hacer, el alumno necesita de un manejo del concepto de función que no sea el mínimo. Es frecuente encontrar alumnos que, a pesar de haber trabajado con nociones referidas al análisis de ciertas funciones (pendientes e intersecciones con los ejes para las lineales, raíces, coordenadas del vértice y ordenada al origen para las cuadráticas, etc.), siguen haciendo sus gráficas a partir de largas tablas de valores. Es claro que este tipo de procedimiento viene acompañado de un limitado análisis de las funciones o de una inseguridad para su uso.

Otro aspecto a destacar y analizar respecto del trabajo con las funciones en la escuela es lo que podríamos llamar una "algebrización de las funciones". Se proponen problemas de cálculos de dominios donde el objetivo final es la resolución de ecuaciones o inecuaciones más o menos complejas, de acuerdo al nivel de escolaridad. Es así que pueden presentarse funciones de fórmula $f(x)=\sqrt{x^2-9}$ ó $f(x)=\frac{\sqrt[6]{5-4x}}{x^2-4}$, que solo tienen existencia en la escuela para el cálculo de dominios. Son funciones que no se estudiarán, ni analizarán, ni se intentará siquiera graficar por ser demasiado complejas. Las funciones que se estudian y analizan en profundidad suelen ser las polinómicas, y trigonométricas, que tienen por dominio a todos los números reales, por un lado, y las racionales, cuyo dominio no son todos los números reales, pero no presenta demasiada dificultad para hallarlo.

Parecería constituirse una norma, obviamente implícita, que dice que hay funciones para analizar y funciones para calcularles el dominio.

Mirta Hanfling señala:

"Las funciones con las que los alumnos trabajan para determinar su dominio se representan en muy pocas ocasiones y la representación gráfica de la función aparece como un fin en sí misma y no como una herramienta del trabajo matemático del alumno.

Se representan en principio, funciones afines, cuadráticas y a trozos. La justificación de las representaciones gráficas a trozos aparece ligada a la necesidad de dar, en el futuro, un cierto grado de significación a conceptos matemáticos tales como límites laterales, continuidad, crecimiento o derivabilidad. El gráfico se constituye por lo tanto en una herramienta ostensiva del docente, para salvar la distancia entre rigor e intuición dar significación a objetos matemáticos definidos formalmente y de forma totalmente descontextualizada."[17]

La autora continúa su análisis señalando que uno de los conceptos que constituyen la noción de función como herramienta para

[17] Hanfling, Mirta, 2000.

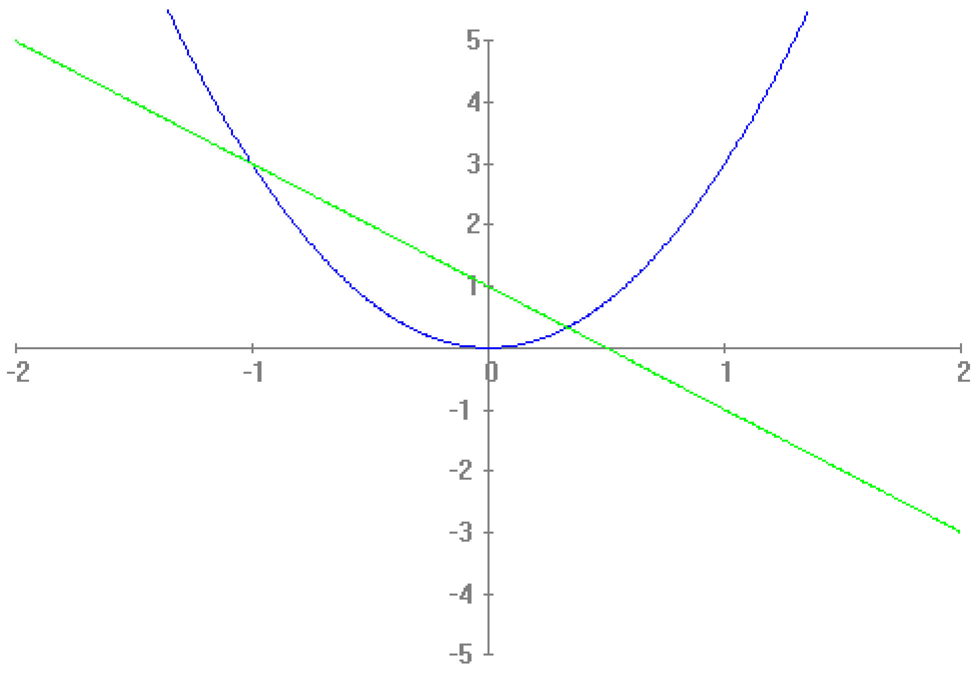
modelizar fenómenos de cambio es la noción de *dependencia*. Esta noción implica la existencia de un vínculo entre cantidades de manera tal que un cambio en una de ellas cantidades tendrá efecto sobre las otras.

La noción de dependencia está constituida además por la noción de *variabilidad*, debido a que "el único medio de percibir que una cosa depende de otra es hacer variar cada una por vez y constatar el efecto de la variación".

Finaliza agregando que *"Los principales elementos que integran la noción de función son, entonces, la variación, la dependencia, la correspondencia, la simbolización y expresión de la dependencia y las distintas formas de representación, sea ella algebraica, gráfica u otra."*

2.2 Las funciones y el álgebra

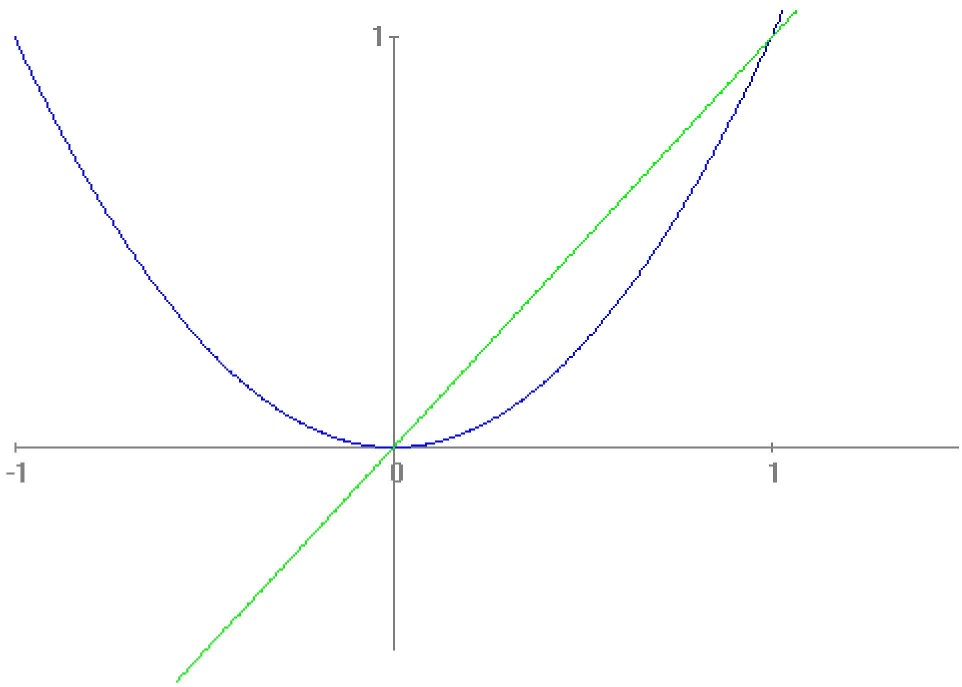
Las funciones pueden ser una herramienta para resolver problemas algebraicos. Por ejemplo, si se trata de encontrar el conjunto solución de la inecuación $3x^2 \leq -2x + 1$, una posibilidad consiste en resolverla algebraicamente y otra es apoyarse en un marco funcional. Si se consideran las funciones $f(x) = 3x^2$ y $g(x) = -2x + 1$, la inecuación puede expresarse como $f(x) \leq g(x)$. Desde el punto de vista funcional, se están buscando las abscisas de los puntos para los cuales el gráfico de la función f coincide o está por debajo del gráfico de la función g:



Si bien se está dando una respuesta a partir de un gráfico combinado con una técnica algebraica para hallar los puntos de intersección de las funciones, la respuesta final solo se puede dar bajo ciertos supuestos que en un principio permanecen implícitos: Los gráficos de dos funciones continuas solo pueden cambiar de posición relativa en sus puntos de intersección.

¿Por qué decimos que estos supuestos son implícitos? Porque si los alumnos solo han trabajado con funciones continuas, nada los hará sospechar que los gráficos puedan comportarse de otro modo. Para ellos se trata de un conocimiento universal; para nosotros, provisorio. Más adelante, cuando presentemos funciones que no sean continuas, tendremos la oportunidad de ampliar este conocimiento.

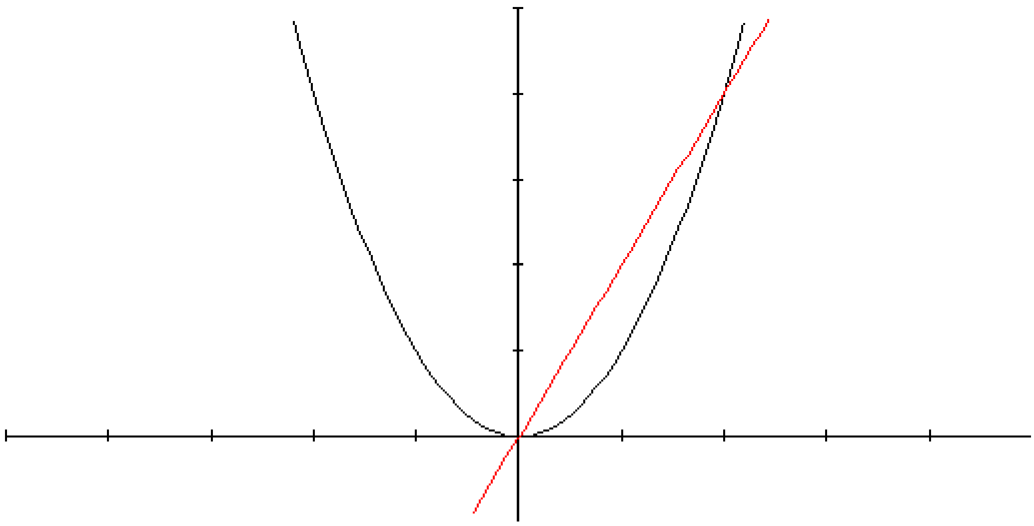
Las funciones proporcionan otra oportunidad para trabajar sobre ciertas concepciones erróneas de los alumnos que muchas veces provienen de extender propiedades válidas en un conjunto numérico a otro. Por ejemplo, la inecuación $x^2 > x$ es siempre verdadera en el conjunto de los números naturales. Cuando se amplía el conjunto numérico a los racionales o los reales, la inecuación anterior pasa a ser verdadera para un conjunto de valores y no para otros. El análisis de las funciones y su comportamiento relativo permite "ver" esta relación:



La función $f(x) = x^2$ es mayor que la función $g(x) = x$ salvo en el intervalo [0 , 1], es decir que el número x^2 es mayor que x, excepto si $0 < x < 1$.

Volviendo al caso de los alumnos que sistemáticamente confunden x^2 con 2x, las funciones ofrecen una nueva oportunidad para reflexionar sobre ellas.

Los gráficos de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2x$ no coinciden, por lo que se puede afirmar que $x^2 \neq 2x$:

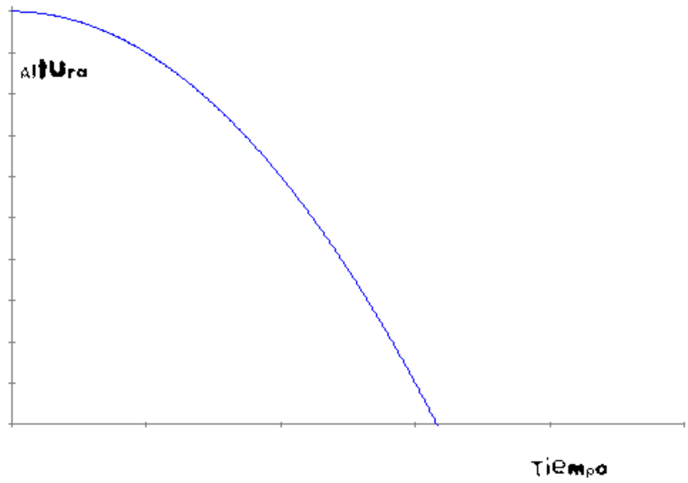


2.3 Ejemplo de un ítem de evaluación de 5º año

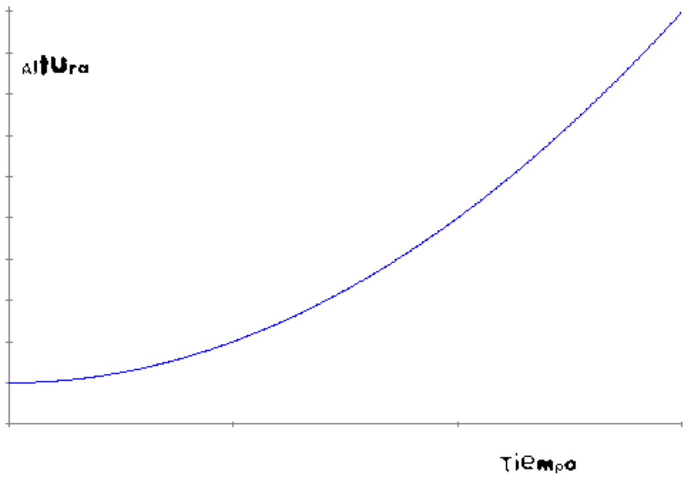
El siguiente problema fue tomado en la evaluación ONE de 2005, para los alumnos de 5º año. ESCANEAR

Un objeto que cae desde una altura de 100 m, al cabo de t segundos, está a una altura de $(100 - \frac{1}{2}gt^2)$ *m. ¿Cuál es el gráfico que representa la altura en función del tiempo?*

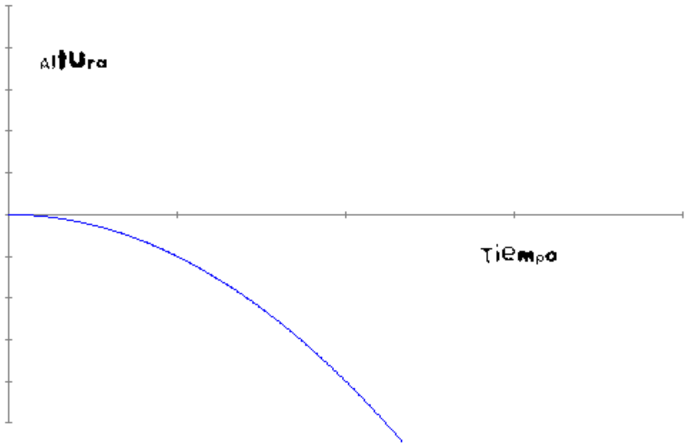
A)



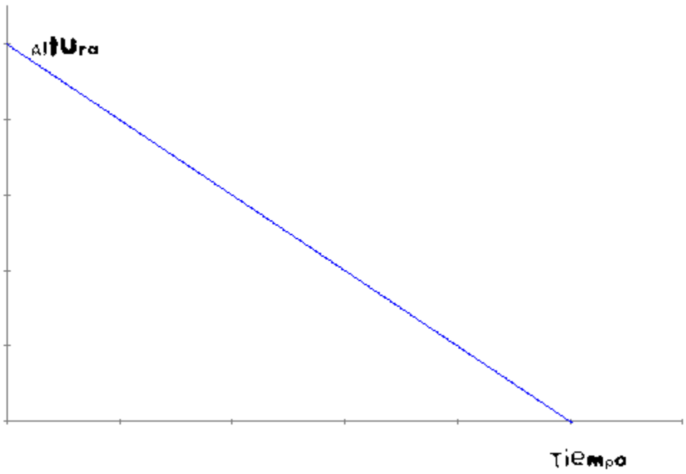
B)



C)



D)



Se trata de un problema que puede resolverse a partir de un análisis cualitativo de la expresión algebraica de la fórmula de la función y su dominio, que viene dado por el contexto. Si de deja caer un objeto desde 100 metros de altura, ésta variará disminuyendo de 100 m a 0 m. El tiempo irá desde 0 segundos, considerado éste como el momento en que se lanzó el objeto hasta el instante en que tocó el piso. El gráfico de la situación estará, por lo tanto, en el primer cuadrante. Esta primera conclusión puede obtenerse solo a partir de analizar el contexto del problema y permite eliminar las opciones B (la altura aumenta) y C (no está en el 1º cuadrante).

Queda por decidir entre los gráficos A y D y el criterio tiene que ver con la diferencia entre la fórmula de una función cuya gráfica es una recta de otra con la que se obtiene una curva. Recién aquí pueden entrar en juego los conocimientos funcionales para decidir que la opción correcta es A.

Es claro que no es un trabajo habitual en las escuelas y los resultados lo muestran. Los resultados obtenidos para este problema fueron:

Opción	Porcentaje
A	41.16%
B	12.22%
C	22.45%
D	12.95%
En Blanco	11.22%

Si bien la mayoría de los estudiantes eligió la respuesta correcta, hay mucha dispersión y es interesante analizar cómo se repartieron sus elecciones: si 41.16% eligió A, 54.84% no lo hizo, y este es un porcentaje demasiado alto para contenidos que son considerados básicos al finalizar la escuela media.

Prácticamente el mismo porcentaje de alumnos eligieron las respuestas B y D, mostrando un desconocimiento sobre las diferencias entre las funciones lineal y cuadrática. Ahora bien, ¿no es este un contenido a trabajar? ¿Qué caracteriza el crecimiento constante de uno que no lo es? ¿Cómo es la fórmula de una función con crecimiento constante? ¿Qué hace que una función cuadrática no tenga un crecimiento constante? Si las respuestas a estas preguntas no son tratadas en clase entonces no es raro que los alumnos confundan los modelos.

En cuanto a la respuesta C, elegida por el 22.45%, podemos pensar que estos alumnos saben que la altura a la que se encuentra la piedra decrece y que no lo hace de manera constante. Fallan al leer algunos de los datos que el gráfico provee:

- al estar en el cuarto cuadrante, estaría diciendo que la altura de la piedra es negativa.
- Parte del origen de coordenadas, lo que significa que la piedra es lanzada desde una altura de 0 metros. También es posible que se haya hecho un cambio de coordenadas, pero no es un conocimiento disponible para alumnos de este nivel de escolaridad.

Nuevamente la falla está en parte del análisis cualitativo, en la interpretación de la información que da un gráfico.

Pensamos que es probable que tengan conocimientos aislados, que no han sido problematizados lo suficiente como para poder tomar decisiones independientemente de las fórmulas. Es posible que muchos de los que respondieron mal hubiesen sido capaces de hallar las raíces o coordenadas del vértice, actividades más vinculadas a un procedimiento casi algorítmico. Como ya hemos dicho, y lo muestran los porcentajes, conocer las fórmulas no habilita a resolver un problema que requiere de un análisis cualitativo porque para hacerlo se requiere de una práctica particular, que necesita ser aprendida.

2.4 Propuesta de enseñanza. ¿Ecuaciones o Funciones?

Si la enseñanza de las ecuaciones no nos satisface como docentes, es necesario encontrar alternativas que tengan en cuenta el análisis anteriormente desplegado.

Creemos que un trabajo en profundidad se puede plantear a través de un análisis de algunas relaciones entre el tratamiento de las funciones y el trabajo algebraico, que incluya una aproximación a la idea de ecuación desde una mirada funcional y algebraica. Es decir, se trata de pensar estos objetos matemáticos -expresión algebraica, función, ecuación- en un juego de marcos[18] en el cual se busca estudiar los modos en que diversas modificaciones o variaciones que puede sufrir una expresión algebraica impactan sobre el gráfico de la función que definen, intentando finalmente explicar estas modificaciones a partir del trabajo algebraico.[19]

Para tal análisis se considerarán dos aspectos:

- Por un lado, el tratamiento de las expresiones algebraicas a partir de concebirlas como fórmulas de funciones, incluyendo la producción de conjeturas sobre dichas expresiones como así también el establecimiento de condiciones de validez de ciertas equivalencias.
- Por otro lado, el estudio de las variaciones que sufre el gráfico de una función a partir de las variaciones de su fórmula.

La expectativa es generar un espacio de exploración sobre algunos problemas que se presentan, poder identificar el papel que juegan los gráficos en el tratamiento de las expresiones algebraicas y finalmente, encontrar argumentos matemáticamente válidos para sostener o refutar las conjeturas, las respuestas y las conclusiones a las que se arribe.

Una posibilidad consiste en el tratamiento de expresiones algebraicas como fórmulas que definen funciones, y que, por ende, involucran la idea de variable.

La determinación de los valores de la variable para los cuales los gráficos de las funciones coinciden es una tarea que se vincula con las ecuaciones, pues se trata de la búsqueda de valores que

[18] Douady, R. (1984)
[19] Itzcovich, H. y Novembre, A. (2007)

verifiquen ciertas condiciones. Y puede ocurrir que haya uno, ninguno, algunos o infinitos valores para los cuales los gráficos de las funciones coincidan.

Para el caso de las ecuaciones lineales, es posible pensar en su estudio a continuación o como parte del contenido función lineal.

Una vez que se hayan estudiado las funciones lineales y sus características es posible usarlas para trabajar al menos un aspecto de las ecuaciones. Por ejemplo, analicemos la siguiente secuencia[20] de problemas:

1) ¿Es cierto que cada una de las rectas dadas a continuación cortan al eje de abscisas? Si es así, ¿en qué punto?

   $y = 2x + 3$ $\qquad$ $y = - 2x + 5$ $\qquad$ $y = 4$

   $x = 2$ $\qquad$ $y = 0$

2) La función $f(x) = 3x + 1$ está definida para los números reales. Sin hacer el cálculo en cuestión analicen si:

   a) $f(x)$ vale 5 para algún valor de x y, en caso de hacerlo, si ese valor es positivo, negativo o cero.

   b) $f(x)$ vale -3 para algún valor de x y, en caso de hacerlo, si ese valor es positivo, negativo o cero.

   c) $f(x)$ vale 0 para algún valor de x y, en caso de hacerlo, si ese valor es positivo, negativo o cero.

3) La función $f(x) = -2x + 3$ está definida para los números reales. Sin hacer el cálculo en cuestión analicen si:

   a) $f(x)$ vale 5 para algún valor de x y, en caso de hacerlo, si ese valor es positivo, negativo o cero.

   b) $f(x)$ vale -3 para algún valor de x y, en caso de hacerlo, si ese valor es positivo, negativo o

[20] Queremos aclarar que esta secuencia se presenta solo a modo de ejemplo y que no alcanza para trabajar todos los contenidos que se discuten a propósito de ella. Son necesarios muchos más problemas y muchas instancias de debate para que los alumnos se apropien de contenidos tan complejos. En este trabajo hacemos una reducción de una secuencia posible para poder ilustrar un posible análisis y un recorrido de enseñanza.

cero.

c) f(x) vale 0 para algún valor de x y, en caso de hacerlo, si ese valor es positivo, negativo o cero.

4) a) ¿Se cortarán en algún punto los gráficos de las funciones $f(x) = 3x - 2$ y $g(x) = 4x + 1$, ambas definidas para los números reales? ¿Por qué?

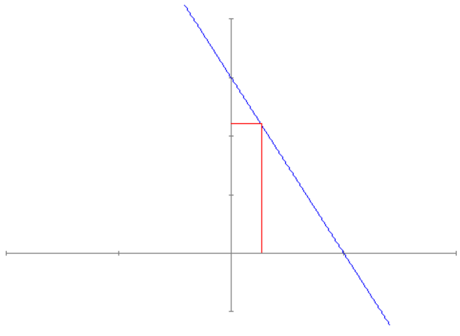
b) ¿Y los gráficos de las funciones $f(x) = 3x - 2$ y $g(x) = 3x + 1$, $x \in \Re$? ¿Por qué?

El análisis de los problemas no es independiente del trabajo previo que se haya hecho con este contenido, de los conocimientos de los alumnos, del tipo de trabajo matemático que se acostumbra desarrollar en cada aula, etc. Es por todo eso que no hay un único análisis ni un único recorrido posible a partir de un conjunto de problemas. No es así como pensamos la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.

Creemos que si luego de su resolución, estos problemas son propuestos para debatir, pueden llevar a que los alumnos –con ayuda del docente- produzcan relaciones relevantes entre las funciones y las ecuaciones. Esto es lo que el docente debería tener como finalidad.

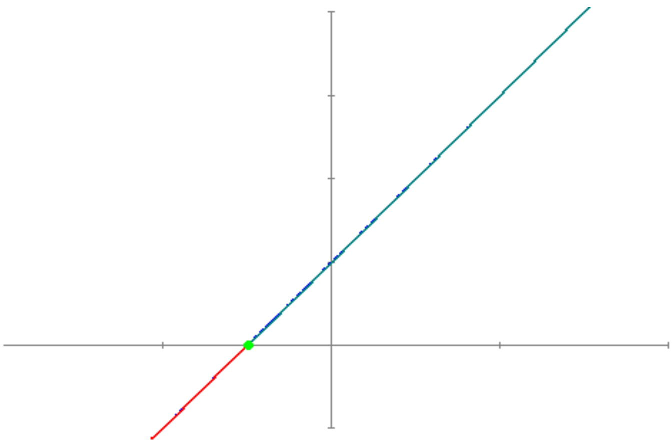
Las ideas y relaciones matemáticas que subyacen a la secuencia son varias:

- Las funciones lineales de pendiente no nula tienen por imagen a todos los números reales, luego para cualquier número real existe un valor de x que se corresponde con él. Dicho de otra forma, dado un valor de $f(x) = a$, la ecuación $mx + b = a$ siempre tiene una única solución.

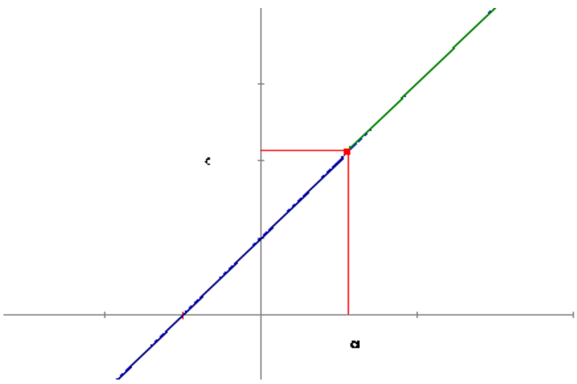


- En particular, todas las funciones lineales de pendiente no nula valen cero para algún valor de x porque 0 es un elemento del conjunto imagen de la función.
- Dada una función lineal de pendiente no nula, si se conoce el valor de x cuya imagen es 0, conociendo el signo de la pendiente se puede saber cuáles son los valores de x que tienen imágenes positivas y cuáles tienen imágenes negativas.

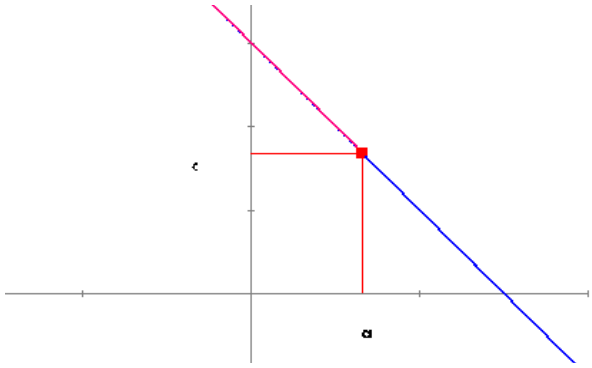
  Si la pendiente es positiva, los valores de x menores que la raíz tienen imágenes negativas y los valores mayores que la raíz imágenes positivas.



- Dada una función lineal de pendiente no nula y un punto que pertenece al gráfico de la misma (a , c), entonces:
  - si la pendiente es positiva, si x < a, f(x) < c y si x > a, f(x) > c.



  - si la pendiente es negativa, si x < a, f(x) > c y si x > a, f(x) < c.



- Si dos rectas tienen la misma pendiente y diferente ordenada al origen, entonces no tienen ningún punto de intersección. Otra forma de pensar en esto es: no habrá ningún valor de x para el cual la imagen que se obtiene en ambas funciones es la misma, luego la ecuación formada al igualar ambas ecuaciones no tiene solución.
- Si dos rectas no tienen la misma pendiente, seguro tienen un único punto de intersección. Otra forma de pensar en esto es: hay un único valor de x para el cual la imagen que se obtiene en ambas funciones es la misma, luego la ecuación formada al igualar ambas ecuaciones tiene una única solución.

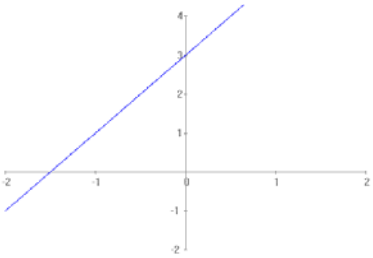
El análisis es necesario completarlo desde el punto de vista didáctico. Algunas de las preguntas que es necesario evaluar son:

- ¿Cómo voy a presentar estos problemas?
- ¿Cómo voy a proponer que los trabajen?
- ¿Qué podrán hacer mis alumnos con estos problemas?
- ¿Qué preguntas puedo hacerles (sin decirles las respuestas) en caso de que no puedan avanzar?
- ¿Qué instancias de trabajo grupal voy a preparar?
- ¿Qué puestas en común voy a hacer, cuándo voy a hacerlas y sobre qué serán?
- ¿Qué conclusiones quiero que se elaboren?
- ¿Qué quiero que quede registrado en las carpetas?

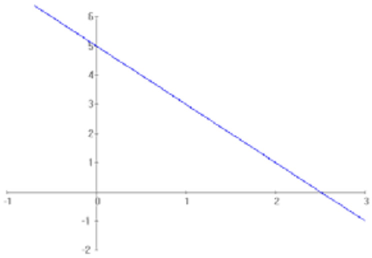
Para resolver el problema 1 es muy posible que los alumnos realicen un gráfico de cada recta. El valor de x donde la recta corta al eje de las abscisas no necesariamente puede leerse del gráfico y necesitará de otro tipo de trabajo.

Así es posible afirmar que las rectas de ecuación $y = 2x + 3$, $y = -2x + 5$ y $x = 2$ cortan al eje x en un solo punto. La recta de ecuación $y = 4$ no lo corta en ningún punto, mientras que la recta cuya ecuación es $y = 0$ tiene todos sus puntos sobre el eje de las abscisas.

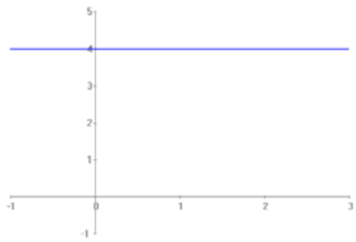
y = 2x + 3



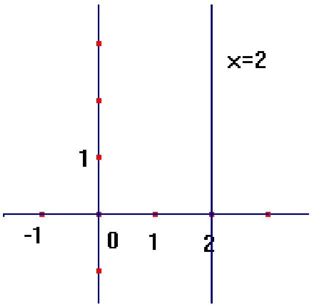
y = - 2x + 5



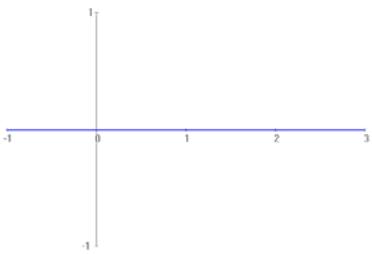
y = 4



x = 2



y = 0



Además, es posible hacer un análisis anticipatorio a partir de las características de las funciones. Por ejemplo:

☑ las funciones lineales de pendiente no nula tienen por imagen a todos los números reales, por lo tanto hay algún valor de x para el cual su imagen es 0.

☑ Las rectas de pendiente cero solo cortan al eje de abscisas si su ecuación es y = 0. En ese caso, lo corta en todos sus puntos. Si su ecuación no es y = 0, entonces no corta a ese eje.

☑ Las rectas verticales solo cortan al eje de ordenadas si su ecuación es x = 0. En ese caso, lo corta en todos sus puntos. Si su ecuación no es x = 0, entonces no corta a ese eje.

☑ Las rectas verticales siempre cortan al eje de abscisas. Si su ecuación es x = 0, lo hace en el punto (0 , 0). Si su ecuación es x = k, el punto de intersección es (k , 0).

Una extensión de la primera relación permite afirmar que para cualquier valor que se elija para f(x), siempre será posible hallar el valor de x que se corresponde con él. Dicho de otra forma, dada la función lineal f(x) = mx + b (m ≠ 0), siempre existe el valor de x para el cual, por ejemplo, f(x) = k, k ε IR. Es decir, la ecuación mx + b = k (m ≠ 0, k, b ε IR) siempre tiene una única solución.

Este análisis -más cualitativo- permite poner el estudio de las funciones lineales al servicio de la comprensión de las ecuaciones.

Simultáneamente se trabaja sobre ecuaciones con solución única, con infinitas soluciones y sin solución, dándole a la letra un sentido más vinculado al de variable que al de incógnita.

Recordemos el segundo problema planteado.

2) La función f(x) = 3x + 1 está definida para los números reales. Sin hacer el cálculo en cuestión analicen si:
   a. f(x) vale 5 para algún valor de x y, en caso de hacerlo, si ese valor es positivo, negativo o cero.
   b. f(x) vale -3 para algún valor de x y, en caso de hacerlo, si ese valor es positivo, negativo o cero.
   c. f(x) vale 0 para algún valor de x y, en caso de hacerlo, si ese valor es positivo, negativo o cero.

Suponiendo que se propone un trabajo secuenciado, donde los alumnos han resuelto, debatido y elaborado conclusiones a propósito del primer problema, se encuentran en posición de poder explorar distintos caminos para resolver este problema. No todos llegarán a un resultado, pero cada razonamiento –correcto o no- será un insumo para la discusión que dirigirá el docente.

Este problema agrega otro elemento al análisis que se utiliza en el problema anterior: el crecimiento y la ordenada al origen de la función. Sabemos que f(x) = 3x + 1 es una función lineal y que su gráfica es una recta de pendiente 3 y ordenada al origen 1: corta al eje de las ordenadas en el punto (0,1) y es creciente.

Al tratarse de una función creciente, para los valores de x mayores que 0 (positivos), la función toma valores mayores que 1 (la imagen de 0). Entonces, el valor de x para el cual f(x) = 5 es positivo.

Análogamente, para los valores de x menores que 0 (negativos), la función toma valores menores que 1 (la imagen de 0). Como entre los números menores que 1 hay algunos positivos y otros negativos, es necesario saber en qué momento la función cambia de signo. ¿Para qué valor de x resulta 3x + 1 = 0?

Esta pregunta puede responderse aritméticamente:

"Si la suma de dos números es 0, uno es el opuesto del otro, entonces 3x = -1. Sabiendo cuál es el número que multiplicado por 3 da 1, es simple encontrar el que dará -1: como $3 \cdot \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -1$*"*

Entonces, la función f(x) = 3x + 1 corta al eje x en el punto $\left(-\frac{1}{3},0\right)$ y es creciente, luego:

- si $x < -\frac{1}{3}$, f(x) < 0
- si $x > -\frac{1}{3}$, f(x) > 0

Este resultado más general permite afirmar que f(x) vale -3 para un valor de $x < -\frac{1}{3}$, que es negativo.

No se espera que el desarrollo anterior sea hecho por un alumno. Es tarea del docente apoyarse en el trabajo de los alumnos para que, en conjunto, se elabore una resolución semejante a la anterior.

El problema 3 pone en juego un análisis similar al del problema 2, con la diferencia que impone el cambio de signo de la pendiente de la recta.

Es así que, luego de un trabajo de exploración por parte de los alumnos y de un debate colectivo, el docente debería tener como proyecto llegar a concluir que la función f(x) = -2x + 3 es decreciente, corta al eje de abscisas en el punto $\left(\frac{3}{2},0\right)$, los valores de x menores que $\frac{3}{2}$ tienen imágenes positivas y los valores de x mayores que $\frac{3}{2}$ tienen imágenes negativas.

No solo hemos podido anticipar el signo del valor de x que estamos buscando, sino que además hemos elaborado una forma de encontrar cuándo una función lineal es positiva y cuándo negativa: sus conjuntos de positividad y negatividad. No resultó necesario hacerlo a través de una inecuación –aunque es totalmente válido- sino que se utilizaron conocimientos vinculados a las funciones.

No estamos priorizando una forma de resolver por sobre otra, sino que proponemos ampliar la mirada de los alumnos. Algunos problemas resultan más sencillos resolverlos algebraicamente mientras que otros lo son desde un marco funcional. Las dos miradas se enriquecen.

Muchas veces, el soporte gráfico permite elaborar conjeturas en tanto que el trabajo algebraico permite corroborar o desechar tales conjeturas, otorgando validez a las respuestas desde el mismo conocimiento matemático.[21]

[21] Itzcovich, H. y Novembre, A. (2007)

A MODO DE CONCLUSIÓN

No fue nuestra intención hacer un estudio exhaustivo de las letras, las ecuaciones y las funciones, sino plantear algunas cuestiones para pensar en su enseñanza y aprendizaje.

Creemos que uno de los puntos más importantes a tener en cuenta es que no son contenidos aislados, sino que están muy relacionados y estudiarlos de ese modo permite comprender mejor cada uno de ellos.

Los invitamos a repensar desde esta óptica algunos de los problemas que habitualmente trabaja y los ponga a prueba con sus alumnos. Llevará tiempo lograr mejores resultados, pero estamos convencidas de que vale la pena.

Bibliografía

- Andresen, Mette, 2007. Understanding of “Modelling”. Danish University of Education. Proceedings of 5th CERME Conference, Larnaca, Cyprus.
- Arcavi, Abraham, 1994. Symbol sense: Informal sense-making in Formal Mathematics. For the Learning of Mathematics, 14(3), pp. 24-35.
- Barallobres, Gustavo, 2000. “Algunos elementos de la didáctica del álgebra” en Chemello, G. y otros. Estrategias para la enseñanza de la Matemática, Buenos Aires, Universidad Virtual de Quilmes.
- Brousseau, Guy, 1986 (1). La relation didactique: le milieu, Actes de la IVème Ecole d’Eté de didactique des mathématiques, pp. 54-68, IREM Paris 7.
- Brousseau, Guy, 1986 (2). Fundamentos y métodos de la didáctica de las Matemáticas. Córdoba, Argentina. Facultad de Matemática, Astronomía y Física. Universidad Nacional de Córdoba.
- Douady, Régine, 1984: Jeux de cadres et dialectique outil-objet. These d'Etat, Université de Paris 7.
- Flückiger, Annick, 2000. Genèse expérimentale d'une notion mathématique: la notion de division comme modèle de connaissances numériques. Thèse présentée à la Faculté de Psychologie et de Sciences de l'Education de l'Université de Genève pour obtenir le grade de Docteur ès Sciences de l'Education. Didactique des Mathématiques.

  http://www.unige.ch/cyberdocuments/theses2000/FluckigerA/these_body.html (julio de 2008)
- Hanfling, Mirta, 2000. "Estudio didáctico de la noción de función", en Chemello, G. y otros. Estrategias para la enseñanza de la Matemática, Buenos Aires, Universidad Virtual de Quilmes.
- Henry, Michel, 1991. « Contrat Didactique. Notion de Contrat Didactique. » Sitio de la Academia de Toulouse. http://webac.ac-toulouse.fr/html/_.php (marzo de 2005)
- Itzcovich, Horacio y Novembre, Andrea, Buenos Aires, 2007. Diferentes Aspectos del Trabajo Algebraico. Material teórico del curso “Diferentes Aspectos del Trabajo Algebraico.” de CePA a Distancia.
- Itzcovich, Horacio y Novembre, Andrea (coordinadores). Borsani, Valeria, Carnelli, Gustavo y Lamela, Cecilia.

Matemática 7. Serie Al Fin de Cuentas. Editorial Tinta Fresca. Buenos Aires, 2006.

- Lacasta, Eduardo y Pascual, José R. Las Funciones en los Gráficos Cartesianos. Editorial Síntesis. Madrid.
- Mary, Claudine, 2003. Interventions orthopédagogiques sous l'angle du contrat didactique. Education et francophonie. Volume XXXI, automne 2003. Université de Sherbrooke, Québec, Canada.
- Mason, John, (1996) Expressing Generality and roots of Algebra, in Bednarz et al (eds), Approaches to Algebra, pp 65-86, Kluwer Publischers, Netherlands.
- Panizza, Mabel, Sadovsky, Patricia, Sessa, Carmen, 1996. Los primeros aprendizajes algebraicos. El fracaso del éxito. Comunicación presentada a la Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina, Salta. http://www.fcen.uba.ar/carreras/cefiec/cefiec.htm (julio de 2008)
- Panizza, Mabel; Sadovsky, Patricia y Sessa, Carmen, 1996. Los primeros aprendizajes algebraicos. Cuando las letras entran en la clase de matemática. Informe de una investigación en marcha. Comunicación REM, Río Cuarto, Córdoba.
- Panizza, Mabel; Sadovsky, Patricia y Sessa, Carmen, 1999. La ecuación lineal con dos variables: entre la unicidad y el infinito. Enseñanza de las Ciencias. Volumen 17 N° 3 pp 453 - 461.