Hacia los números reales en la EGB

El Equipo

Resumen

En este artículo se muestra un camino posible para llegar hasta el conjunto IR de los números reales, considerando como punto de partida los números naturales, que aparecen en el Nivel Inicial. En realidad, completamos el artículo presentado en el número anterior (Número 18) de la revista, en el que abordamos el conjunto de los números racionales.

Es imposible tratar rigurosamente el conjunto de los números reales en esta etapa de la escolaridad. Pero su conocimiento, aún de manera muy intuitiva, es necesario para poder abordar otros temas. En el nivel siguiente continúa su estudio.

Hacia los números reales en la EGB

PARTE I

A manera de introducción

Dentro de los conocimientos matemáticos, el número fue el primero en desarrollarse, en tanto representación directa (o casi) de la realidad material (natural). Por ello parece razonable haber dedicado, hasta acá, tres artículos para considerar algunas cuestiones que tienen que ver con su tratamiento en las aulas de EGB.

Coincidimos en la necesidad de una buena enseñanza del número, en tanto concepto estructurante de la propia disciplina y del proceso de apropiación de saberes matemáticos en el alumno, que transita la escolaridad obligatoria.

En el número 17 de esta revista nos dedicamos a los números decimales, y en el número 18 lo hicimos con los números racionales. Ahora estamos interesados en presentar breves consideraciones referidas a los números reales en los dos últimos años de la EGB, recuperando lo hecho sobre los contenidos numéricos, en los niveles anteriores de la escolaridad. Al fin, todos son números reales.

Al término de la escolaridad obligatoria, los distintos sistemas numéricos IN, Z, ID, Q e I, deberían quedar claramente caracterizados, tanto por sus propiedades básicas, como por sus usos y aplicaciones.

A su vez, son esos contenidos los que se recuperarán en el Nivel Polimodal y "*deberán ser ampliados y profundizados, ya sea para mejorar su organización, su forma de comunicación o su aplicación a nuevos temas o problemas; de manera que el alumno/a pueda acceder a un mayor nivel de sistematización, integración y abstracción en lo conceptual y metodológico*". [1]

[1] Contenidos Básicos Comunes para la Educación Polimodal. Ministerio de Cultura y Educación de la Nación. Consejo Federal de Educación.

PARTE II

Un camino posible.

Propuesta sintética de los contenidos relacionados con los conjuntos numéricos a considerar, según el Diseño Curricular de la Jurisdicción, Tercer Ciclo de la EGB. [2]

Año 8º	Año 9º
Números enteros. Valor absoluto. Orden. Discretitud. La recta numérica. Operaciones enteras y cálculos. Potencias de exponente natural. División exacta y entera. Números racionales negativos. Número racional. Números racionales decimales y no decimales. Usos. Formas de escritura (posicional y fraccionaria). Equivalencias. Notación científica. Comparación. Valor absoluto. La recta numérica y los números racionales. Orden. Aproximación. Encuadramiento. Densidad. Operaciones racionales y cálculos bajo distintas representaciones (Fraccionaria y decimal). Propiedades. Potencias con exponente entero. Producto y cociente de potencias de igual base. Diversas formas de cálculo. Uso de calculadora. Algunos números irracionales. Los números reales. La recta numérica real	
	Números irracionales (π, raíz cuadrada de 2, razón áurea). Números reales. Noción. Designaciones. Racionales y no racionales. La recta numérica real. Completitud. Intervalos. Orden. Encuadramiento, aproximación y truncadura. Operaciones con reales y los cálculos en los distintos subconjuntos numéricos. Diversas formas. Error absoluto y relativo. Margen de error. Raíces cuadradas por aproximaciones sucesivas. Uso de la calculadora.

Al llegar a este ciclo de la escolaridad se debe procurar que los alumnos rescaten lo más que puedan de las nociones fundamentales en las que se iniciaron en el Nivel Inicial y Primer Ciclo, y que luego profundizaron y complejizaron en el Segundo. Los contenidos recuperados de los ciclos anteriores deben nuevamente ser ampliados y profundizados en esta nueva etapa, ya sea para mejorar su organización, su forma de comunicación o su aplicación a nuevos temas o problemas, de tal manera que los alumnos puedan acceder a un principio de sistematización, integración y abstracción.

[2] *Propuesta Curricular de Matemática para el Tercer Ciclo de la EGB*. (1998). Dirección General de Escuelas. Gobierno de Mendoza.

PARTE III

Hacia los números reales.

Acerca de los números racionales.

1 Al llegar a 8º año, los alumnos traen (del 7º año) el conocimiento de la existencia de los números enteros. Tienen ahora la oportunidad de aprender algo más acerca del conjunto Z: el valor absoluto de un número, el orden, la discretitud, las operaciones enteras, sus propiedades y cálculos. Z es un anillo conmutativo con unidad. Estos números se pueden "ubicar" en la recta numérica.

A partir del conjunto ID^+ (de los decimales positivos), que comenzó a tratarse al finalizar el Segundo Ciclo, pudo construir en el 8º año, adjuntando los decimales negativos el conjunto ID, de los decimales (relativos). Estos números se pueden "ubicar" en la recta numérica.

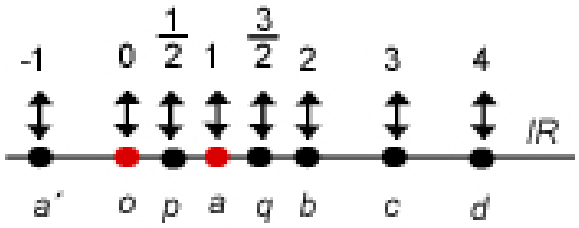
Algo similar ocurrió con los números racionales. A partir de Q^+, (conjunto de los racionales positivos), adjuntando los racionales negativos se pudo construir el conjunto Q, de los racionales.

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} / a \in Z, b \in Z, b \neq 0 \right\}$$

Estos números también se pueden "ubicar" en la recta numérica.

Destacamos que la recta numérica debe estar presente en el momento de abordar cada uno de los conjuntos numéricos considerados. Puntualicemos para el conjunto Q^+, de los racionales positivos. Sabido es que hay distintos métodos para representarlos (sean naturales, decimales positivos y racionales positivos, no decimales), por puntos de una recta provista de una escala (0, 1), según la cual el número 0 se asocia con un punto o (punto origen), y 1 con el

punto *a* (punto unidad). A cada número x = $\frac{a}{b}$ de Q^+ le corresponde un punto único de dicha recta, conocido como "*punto asociado al número x* "



La figura anterior se puede simplificar escribiendo directamente cada número junto al punto asociado con él. También es lícito usar el número para designar el punto. Así, podemos decir *punto* $\frac{3}{2}$ en lugar de *punto p asociado al número* $\frac{3}{2}$. Pero tengamos cuidado, éste es un lenguaje muy cómodo, pero abreviado: un punto no es un número, y por eso al decir

punto $\frac{3}{2}$

sobreentendemos lo encerrado en paréntesis en la frase completa

punto (asociado al número) $\frac{3}{2}$

Posteriormente, al ampliar los dominios numéricos y abordar el conjunto ID de los decimales (relativos), y el conjunto Q de los racionales, es conveniente buscar procedimientos gráficos similares, con el propósito de ubicar algunos puntos enteros negativos, decimales negativos y racionales negativos.

Lo importante es comprender que a cada número le corresponde un punto y solo uno, de la recta numérica. Más aún, los alumnos intuyen que todos y cada uno de números racionales quedan representados en la recta numérica racional por su gráfica (punto asociado al número). Conoce que Q es un conjunto que se caracteriza por su densidad, a diferencia de la discretitud de Z. Y sin embargo Q no completa la recta la numérica. Una gran sorpresa!!! Ésa es una señal de que todavía hay puntos en la recta que no están asociados con ningún número racional.

2 Los números irracionales.

Todavía faltan números para completar la recta numérica.

Al llegar a 8º año, conocen, necesariamente, dos números no racionales (irracionales): el número π y $\sqrt{2}$. En el 9º año, aparece otro irracional interesante: el número de oro, simbolizado por ϕ (fi). Todos esos números, lo mismo que $\sqrt[3]{5}$, son irracionales y, por tanto, no admiten escritura fraccionaria.

Con ellos podemos formar un nuevo conjunto, llamado el conjunto de los números irracionales anotado, generalmente, por I. Tienen una característica muy especial. Cuando los escribimos con escritura posicional, aparecen con una coma y, con infinitas cifras después de ella. Pero ¡cuidado!, porque los racionales no decimales, como $\frac{2}{3}$, también tienen infinitas cifras después de la coma. ¿Dónde está la diferencia? Las cifras decimales de los números irracionales carecen de parte periódica. Por otra parte, al ser no racionales no se pueden escribir en forma fraccionaria.

Con estos números se hacen cálculos, y tienen su lugar en la recta. Ahora sí, que no quedan “huecos” en la misma. Los procedimientos para encontrar su gráfica no son sencillos, pero es posible conocer algunas construcciones.

Lo importante es tener presente que:

- Los números irracionales no pueden expresarse en forma de fracción;
- Si se los escribe mediante notación decimal (con coma decimal), tienen infinitas cifras no periódicas.

También es usual decir que tienen un desarrollo decimal con infinitas cifras no periódicas. Precisamente, por esas características de su escritura se distinguen de los números racionales.

Estos nuevos números se ubican en la recta numérica y cubren los vacíos que dejaron los números racionales.

Consideremos algunos de ellos.

- El número π

π (pi) es un número irracional. Tiene su punto representativo en la recta numérica. No es fácil de representar.

Aparece en la geometría euclidiana como la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro. En efecto:

Llamamos π, o número π, a la razón $\frac{|C|}{d}$ de la longitud de una circunferencia C a su diámetro d, la cual no depende de la circunferencia C, o sea es la misma para todas las circunferencias. Siendo r el radio, es d = 2 r, la longitud de la circunferencia se expresa así:

$|C| = \pi.d = 2\,\pi\,r$

El valor numérico de π, truncado a sus primeras cifras, es el siguiente:

$\pi \approx 3{,}14159265358979323 84\ldots$

A continuación consignamos algunas fórmulas que incluyen a π en la geometría euclidiana

- Longitud de la circunferencia de radio *r*: $C = 2\,\pi\,r$

Áreas de secciones cónicas:

- Área del círculo de radio *r*: $A = \pi\,r^2$
- Área de la elipse con semiejes *a* y *b*: $A = \pi\,ab$

Áreas de cuerpos de revolución:

- Área del cilindro: $2\,\pi\,r\,(r+h)$
- Área del cono: $\pi\,r^2 + \pi\,r\,g$
- Área de la esfera: $4\,\pi\,r^2$

Volúmenes de cuerpos de revolución:

- Volumen de la esfera de radio *r*: $V = (4/3)\,\pi\,r^3$
- Volumen de un cilindro recto de radio *r* y altura *h*: $V = \pi\,r^2\,h$
- Volumen de un cono recto de radio *r* y altura *h*: $V = \pi\,r^2\,h\,/\,3$

- **El número $\sqrt{2}$**

La raíz cuadrada de 2, $\sqrt{2}$, se conoce, a menudo, como **constante pitagórica**. Es un número real positivo, tal que multiplicado por sí mismo da el número 2. Tiene su representación en la recta numérica.

Su valor numérico aproximado a 65 posiciones decimales sucesión A002193 en OEIS es:
1,41421 35623 73095 04880 16887 24209 69807 85696 71875 37694 80731 76679 73799.

La raíz cuadrada de 2 fue posiblemente el primer número irracional conocido.

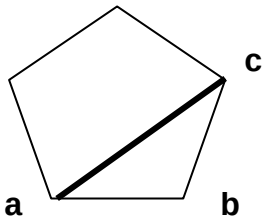
Geométricamente da la longitud de la diagonal de un cuadrado cuyo lado tiene longitud unidad; el valor de la longitud de esta diagonal se puede averiguar mediante el Teorema de Pitágoras.

- **El número ϕ (fi)**

Su valor numérico es 1, 618 … $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

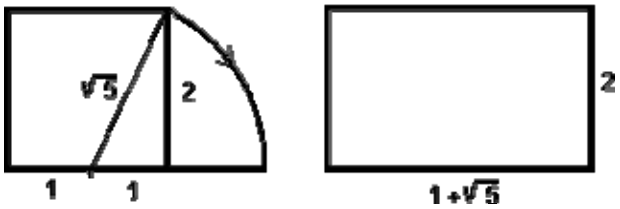
Se cree que los griegos obtuvieron este número al hallar la relación entre la diagonal del pentágono regular y su lado. Esto hace posible construir un pentágono regular usando regla y compás.

$$\frac{ac}{ab} = \frac{1+\sqrt{5}}{3} = 1{,}61803...$$



A este número se le llama número de oro, se representa por el símbolo Ø y su valor es 1,61803..., lo obtuvieron los griegos al hallar la relación entre la diagonal de un pentágono y el lado. El nombre de "número de oro" se debe a Leonardo da Vinci.

Este número irracional está vinculado también con un rectángulo especial llamado rectángulo áureo. Se trata de un rectángulo armonioso en sus dimensiones.



Dibujamos un cuadrado y marcamos el punto medio de uno de sus lados. Lo unimos con uno de los vértices del lado opuesto y llevamos esa distancia sobre el lado inicial. De esta manera obtenemos el lado mayor del rectángulo.

Si el lado del cuadrado vale 2 unidades, es claro que el lado mayor del rectángulo vale $1+\sqrt{5}$, por lo que la proporción entre los dos lados es:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

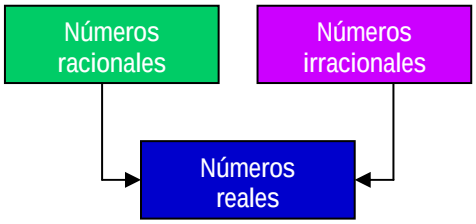
El símbolo Ø para la relación áurea, fue elegido por el matemático americano Mark Barr por ser la primera del nombre de Phidias, que solía usar la relación áurea en sus esculturas.

Tiene su punto representativo en la recta numérica. ¿Imagina en qué intervalo de la misma se ubica?

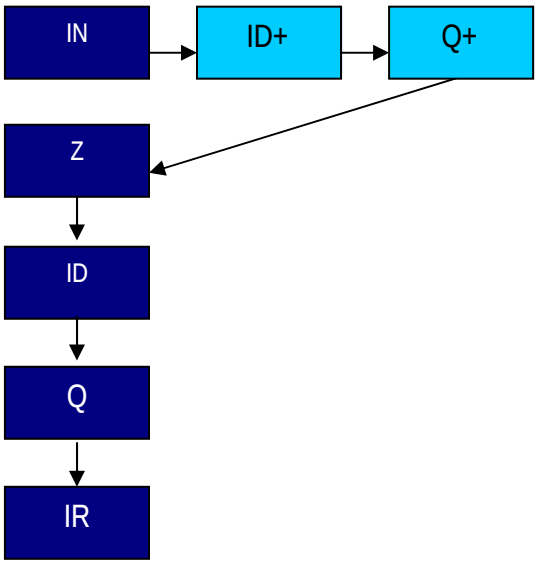
3 Los números reales

De manera intuitiva, y con la identificación de números como $\sqrt{2}$, π , ... , necesarios para ciertos desarrollos, aparece de manera natural, (en ese nivel de la escolaridad), el conjunto IR. Son números que no admiten escritura fraccionaria.

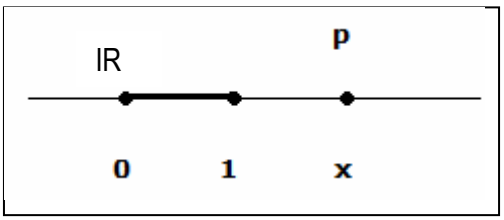
IR = {x : x es racional o x es no racional}



En síntesis: el camino seguido en los distintos ciclos de la EGB para llegar hasta IR.

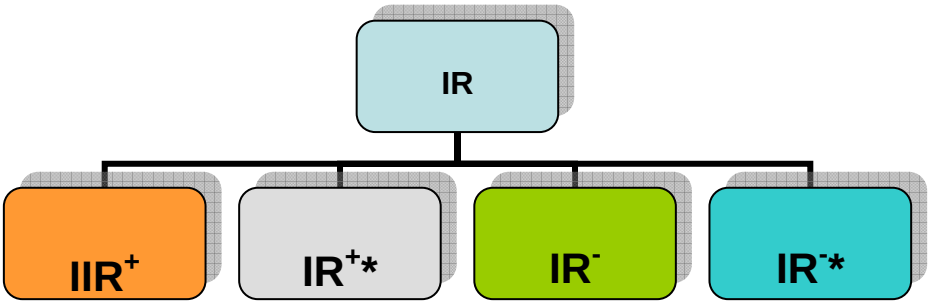


En la recta numérica real están representados todos. También se llama recta real o, eje de abscisas reales.



Atención!!! Todo número real tiene su gráfica en la recta numérica. Todo punto de la recta tiene su abscisa real.

En este conjunto distinguimos los subconjuntos IR^{+}, IR^{-} , IR^{+*} y IR^{-*}.



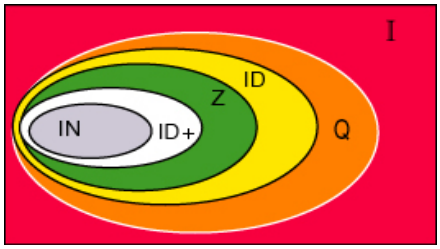
¿Cuáles son los números reales que conforman cada subconjunto de IR?

PARTE III

Acto de imaginería.

1 Juan se encuentra con un grupo de colegas.

Como ya han revisado los conjuntos numéricos usuales, pueden intercambiar opiniones. Tienen muy claro cuáles son los números naturales, enteros, decimales, racionales, irracionales y los reales.



Pero se encuentran con algunas expresiones que aparecen en los textos, que no comprenden bien. Saben, por otra parte, que los números son objetos matemáticos y, por tanto, objetos ideales. Como ocurre con todos los objetos matemáticos hay que representarlos. Pero una cosa es el número y otra, su representación. Éstas pueden ser expresiones, símbolos, palabras, … Por eso están desconcertados cuando se les pide "sumar expresiones fraccionarias". ¿No les habrán querido decir "sumar números fraccionarios, dados con notación fraccionaria? Pero hay mucho más. Ellos hicieron muchas observaciones.

Lean ustedes. A lo mejor coinciden con de lo que dijeron Juan y un grupo de colegas.

Les damos una ayudita:

Equivalencia entre *expresiones fraccionarias* y *decimales* de uso frecuente para una *misma cantidad*.

- Comparar, entre sí y con *números naturales*, *fracciones* y *expresiones con una o dos cifras decimales* de uso frecuente a través de distintos procedimientos.
- Sumar y *cantidades* expresadas por *fracciones* y *decimales* para calcular dobles, triples, …
- Elaborar y comparar procedimientos de cálculo – exacto y aproximado, mental, escrito y con calculadora – de sumas y restas entre *fracciones* y entre *expresiones decimales por un número natural*, incluyendo el encuadramiento entre de los resultados entre naturales y analizando la pertinencia y economía del procedimiento en relación con los *números involucrados.*
- Elaborar estrategias de cálculo utilizando, progresivamente, resultados memorizados, relativos a *fracciones* y a *expresiones decimales* de uso corriente (1/2 + ½; 174 + ½; ½ + ¾; 0, 25 + 0, 25; 0, 50 + 1, 50; dobles; etc.).
- Comparar *fracciones* y/o *expresiones decimales* a través de distintos procedimientos, incluyendo la representación en la recta numérica e intercalando *fracciones* y *decimales* entre otros números.
- Analizar afirmaciones sobre las relaciones y propiedades que diferencian los *números naturales* de las *fracciones* y las *expresiones decimales*.
- Usar diferentes representaciones para de un *número racional* (expresiones *fraccionarias* y *decimales*, *notación científica*, *punto de la recta numérica*, …), argumentando sobre su equivalencia y eligiendo la representación más adecuada en función del problema a resolver.
- Analizar diferencias y similitudes entre las propiedades de los *números enteros* (Z) y los *racionales* (Q) (orden, discretitud y densidad).
- A veces, se define un número irracional como un decimal infinito no periódico. SE TRATA DE UNA DEFINICIÓN CON ERROR. No es un número decimal. Tiene escritura decimal, con infinitas cifras no periódicas.
- (…)

PARTE IV

Reflexiones

1 En este artículo solamente tuvimos en cuenta un camino posible para considerar los números reales a lo largo de la EGB.

Sabemos que es necesario, pero no, suficiente. El camino de los aprendizajes tiene dos puntas: el que aprende y el que enseña, y en el medio está el saber y la metodología. Y esa metodología implica cómo se va a enseñar, qué pretendemos que aprenda, y con qué le vamos a llenar la cabeza.

Cualquier pretensión de enseñar en este nivel de la escolaridad, no debe desconocer la distancia que existe entre el saber o conocimiento erudito (académico) y las posibilidades que tiene el sujeto de conceptualizarlo. El proceso mediante el cual el saber académico se transforma a efectos de ser enseñado se denomina *"transposición didáctica"* y fue elaborado por Chevallard.

Este proceso que implica simplificaciones, recortes, etc., expone al conocimiento a deformaciones que pueden vaciarlo de contenido, poniendo en riesgo su significado. Cobra significado aquí el concepto de "vigilancia epistemológica". La propuesta analítica de criterios de adquisición de los conceptos de Vergnaud complementa la de Chevallard en tanto la primera se ocupa del enseñar en cuanto al saber que se enseña y ésta en definir qué es necesario para que un concepto pueda ser aprendido.

Un concepto se adquiere si: a) es operativo, es decir, si permite enfrentar una situación nueva y resolverla con dicho concepto (el pensamiento es conceptual y obedece simultáneamente a criterios prácticos y teóricos); b) se construye a lo largo del tiempo, el concepto se aplica en distintos contextos y problemas, permitiendo descubrir distintas propiedades del mismo; c) se distingue significado de significante (concepto de su representación).

Este artículo ha sido elaborado tomando como fuentes:

- Fascículo 11 *La Matemática en el* Segundo Ciclo (DGE: 1996);
- Fascículo 33 *La Matemática en el Tercer Ciclo* (DGE: 1998);

materiales de apoyo para el docente, producidos por el Equipo de Curriculum y Capacitación en Matemática dependiente de la Dirección General de Escuelas. Gobierno de Mendoza.

- Alderete M. J. y otros (1996), *El mundo de los números y la Aritmética*. Mendoza: DGE