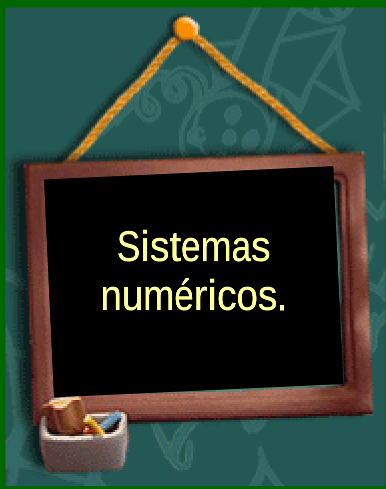


El largo camino hacia el Álgebra de los Números Reales

El Equipo

La idea central del artículo es abordar de manera breve el Álgebra de los números reales. Previamente se revisan conceptos básicos acerca de los números irracionales. Se señalan especialmente: el Número de oro, El número *e* y el Número pi. Construido el conjunto IR, como reunión de los conjuntos Q y I, se tratan cuestiones como el módulo de un número real, la distancia entre dos reales, la relación de orden y la cardinalidad del conjunto IR. Luego se muestran las dos estructuras algebraicas que tiene el conjunto IR: la estructura de cuerpo y la de espacio vectorial sobre IR. Por presentar ambas estructuras algebraicas, con determinados requisitos, el conjunto IR tiene la estructura algebraica de Álgebra. Se trata del Álgebra de los números reales.

Palabras clave: números reales, propiedades de los reales, estructuras algebraicas, sistemas numéricos.

PARTE I

1. Revisando algunos sistemas numéricos.

1. 1 Acerca de IN, Z, ID y Q.

Sean:

IN, el conjunto de los números **naturales** 0, 1, 2, ...

Z, el conjunto de los números **enteros**..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...

Q, el conjunto de los números **racionales**, o sea de los números que admiten representación fraccionaria $\frac{a}{b}$ con *a*, *b* enteros y $b \neq 0$.

Es posible demostrar la siguiente cadena de inclusiones

IN $\subset$ **Z** $\subset$ **Q**

La razón de la “ampliación” de los conjuntos numéricos señalados, es bien conocida:

- por la imposibilidad de resolver siempre en IN la ecuación de la forma

$a + x = b$

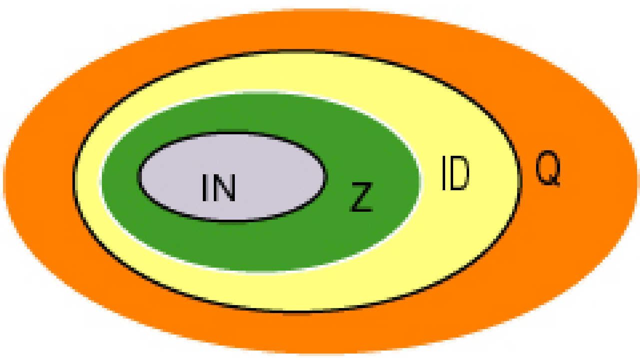
se crea el conjunto Z;

- por la imposibilidad de resolver siempre en Z la ecuación de la forma

$a \times x = b$

se crea el conjunto Q.

También vimos en el artículo *Los números decimales,* considerado en la Revista mendom@tic@ Nº 17, la posibilidad de incluir otro conjunto numérico entre Z y Q: el conjunto ID de los números decimales. Se trata de un sistema numérico que tiene estructura algebraica de anillo.



Se dijo que un número d es un número decimal si y solo si, puede escribirse bajo la forma

$d = n.\ 10^{p}$, donde n y p son números enteros.

- Si p es positivo, el decimal $d = n\ .\ 10^{p}$ es un número entero.

El conjunto Z de los enteros está, por tanto, incluido en ID: Z $\subset$ ID. Todo entero es un decimal, pero no todo decimal es un entero.

- Si p es negativo, el número $d = n\ .\ 10^{p}$ es un número decimal que se puede escribir como $d = \frac{n}{10^{-p}}$ (- p es ahora positivo).

Este número d también se puede escribir como un número con coma, (con escritura decimal), obtenido a partir de la escritura de n colocando la coma (decimal) de manera que p cifras figuren a la derecha de la misma.

La inclusión ID $\subset$ Q, con ID $\neq$ Q, está diciendo que todo número decimal es un número racional y que, hay números racionales que no son decimales.

Ejemplos:

1,5 es un número racional (decimal), porque 1,5 = 3 / 2

7, 6666666... es un número racional (no decimal) porque 7,6666666... = 23 / 3

5 es un número racional (entero positivo), porque 5 = 5 / 1

- 3 es un número racional (entero negativo), porque -3 = -3/1

En particular, 0 es un número racional por que 0 = 0/n, para todo n racional distinto de 0.

1.2 Una propiedad de los racionales enteros.

Sabemos que todo número entero es racional, ya que se puede escribir como el cociente entre él mismo y 1. Por otra parte en el conjunto de los números enteros hay números pares y números impares.

Si un número es par, ¿será verdad que su cuadrado es par? La respuesta es sí. ¿Por qué?

Si un número x es par, eso significa que x se puede escribir como $x = 2 \times n$, donde n es también un número entero. Si elevamos a x al cuadrado es:

$x^2 = 4 \times n^2 = 2\ x\ (2 \times n^2)$

Esto significa que x^2 es par.

Por ejemplo: 6 es un número entero par: se puede escribir como $6 = 2 \times 3$, siendo 3 un entero. Entonces

$6^2 = 2^2 \times 3^2 = 2 \times (2 \times 3^2) = 2 \times (2 \times 9) = 2 \times 18$

Luego, 6^2 es un número par.

Ahora, pensemos la propiedad al revés:

Si x^2 es par, entonces ¿x tiene que ser par?

Veamos: si x no fuera par, entonces, seria impar. En ese caso, x se podría escribir así:

$x = 2k + 1$, donde k es cualquier número natural.

Pero entonces, al elevarlo al cuadrado, no, puede ser par tampoco, ya que

$x^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4m + 1$ (siendo $m = k^2 + k$).

Luego, si $x^2 = 4m + 1$, es x^2 un numero impar.

Conclusión:

Si el cuadrado de un número *x* es par, es porque *x* ya era par.

PARTE II

Los números irracionales

2.1 Presentación de los números irracionales

Conocemos que hay números reales que no pueden expresarse en forma de fracción y que, si se los escribe mediante notación decimal (con coma decimal) tienen infinitas cifras no periódicas. También es usual decir que tienen un desarrollo decimal con infinitas cifras no periódicas.

Esos números aparecen por ejemplo, al resolver ciertas ecuaciones cuadráticas con coeficientes enteros o racionales. Tal es el caso de los números reales $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, etc. Hay otros como el número *e,* o el número de oro, que aparecen de manera diferente.

Se trata de los números irracionales que eran ya conocidos por los antiguos griegos, si bien su estudio no se sistematizó hasta la Edad Moderna europea.

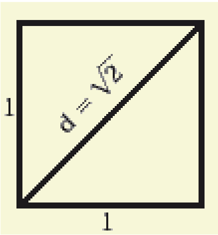
Los números irracionales aparecen naturalmente cuando se estudia el conjunto de los números reales. Por supuesto que algunos, como el número pi, son conocidos en la escuela mucho antes. ¿Quién no recuerda el teorema de Pitágoras?

¿Cuáles son las características de estos números reales no racionales? Ya lo dijimos: Los números irracionales no admiten escritura fraccionaria poseen infinitas cifras decimales que no siguen un periodo definido.

A veces, se define un número irracional como un decimal infinito no periódico. SE TRATA DE UNA DEFINICIÓN CON ERROR. No es un número decimal. Tiene escritura decimal, con infinitas cifras no periódicas.

2.2 El problema de los pitagóricos con el número $\sqrt{2}$

Venimos de decir que los números irracionales no se pueden escribir en forma de fracción. Ese fue el problema que se les presentó a los pitagóricos al calcular la longitud de la diagonal de un cuadrado cuyo lado mide 1, aplicando la propiedad conocida como Teorema de Pitágoras. No encontraban cómo darlos con escritura fraccionaria.



En aquel momento los únicos números que se conocían eran los racionales. Es natural que trataran de probar que cualquier número con el que tropezaban fuera racional.
O sea, si en esa época los únicos números que se conocían eran los racionales, resulta razonable que trataran de encontrarle una escritura fraccionaria *p/q* con *q* distinto de 0, a cualquier número que apareciera.

¿Qué hicieron? Buscar una demostración valiéndose de las propiedades que de los racionales enteros que consideramos precedentemente.

Supongamos (como hicieron los griegos) que $\sqrt{2}$ es un número racional. Si es así, entonces, tienen que existir dos números enteros *p* y *q (q no cero)*, de manera tal que $\sqrt{2}$ = (p / q). Al escribir (p/q), suponemos ya que hemos "simplificado" los factores comunes que puedan tener *p* y *q.* En particular, suponemos que ambos no son pares, ya que si lo fueran, simplificaríamos la fracción que lo representa y eliminaríamos el factor dos, tanto en el numerador como en el denominador. O sea: podemos suponer que, o bien *p* o bien *q* no son pares.

Luego, elevando al cuadrado ambos miembros, tenemos: $2 = (p / q)^2 = p^2 / q^2$ y si ahora aplicamos este artificio conocido de "pasar multiplicando el denominador del segundo miembro al primer miembro", resulta: $2 \times q^2 = p^2$

Esta ecuación nos dice que el número p^2 es un número par (ya que se escribe como el producto de 2 por un entero). Como vimos anteriormente, si el número *p* es par, es porque el propio número *p* es un número par. Entonces el número *p*, como es un número par, se puede escribir así:

$p = 2k$

y al elevarlo al cuadrado se tiene:

$p^2 = 4k^2$

Reemplazando en la ecuación original, resulta:

$2q^2 = p^2 = 4k^2$

v simplificando por 2 en ambos lados, es

$q^2 = 2k^2$

Por lo tanto, el número q^2 es par también. Pero ya sabemos que si q^2 es par, es porque el número *q* es par. Y en ese caso, considerando lo que hemos demostrado, resultaría que tanto *p* como *q* serian pares. Y eso no es posible, porque habíamos supuesto que si fuera así, los habríamos simplificado.

Conclusión: el número $\sqrt{2}$ no es racional, o sea es irracional.

No se puede dar con escritura fraccionaria. Cuando escribimos 1,4142135 es solo una aproximación a 7 cifras decimales del número irracional $\sqrt{2}$. Decimos, con toda propiedad, que el número raíz cuadrada de dos es *aproximadamente* igual a 1,4142135 en 7 decimales, o bien es *igual* a 1, 4142135… Los puntos suspensivos hacen referencia a los infinitos decimales que hacen falta y que jamás terminaríamos de escribir.

(Nota: no todos los números irracionales son tan fáciles de fabricar como $\sqrt{2}$. Hay algunos que son esencialmente bien distintos y por razones que escapan al objetivo de este artículo, no es posible hacer una demostración similar.)

2.3 Clases de números irracionales.

• Un número irracional es **algebraico** si es raíz de algún polinomio (no nulo) con coeficientes enteros (o racionales), o sea que proviene de una simple relación algebraica. Ejemplo, el número $\sqrt{2}$.

• Un número irracional es **trascendente** (o **trascendental**) si no es raíz de ningún polinomio (no nulo) con coeficientes enteros (o racionales). En este sentido, *número trascendente* es antónimo de *número algebraico*. Por ejemplo, el número de oro, y el número *e*.

Lo cierto es que el conocimiento de la existencia de números no racionales, fue una importante conclusión que abrió un campo nuevo, inexplorado y muy fructífero. Actualmente nos parece muy natural de hablar de ellos y usarlos en diferentes capítulos de la Matemática o en otros campos del saber.

También es natural aceptar que la reunión de los racionales y los irracionales componen el conjunto IR de los números reales.

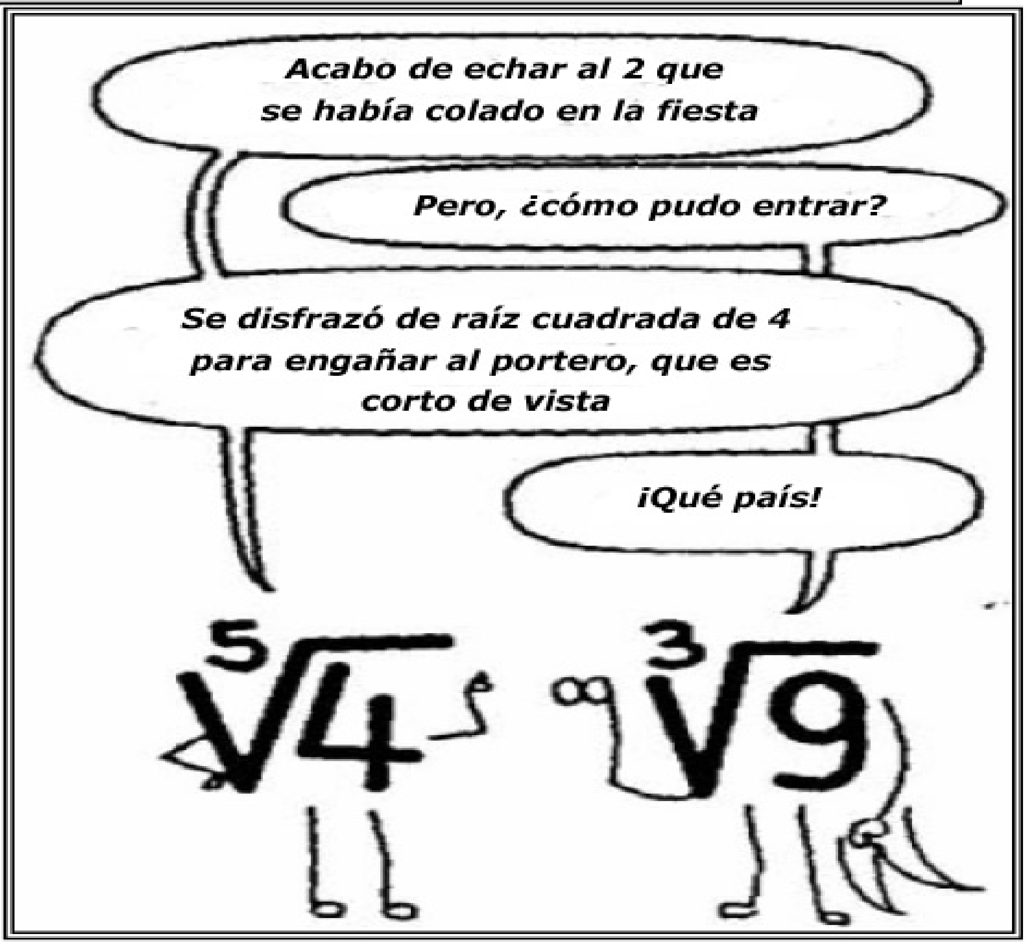
Al fin son todos los números que necesitamos
para medir en nuestra vida cotidiana.

2.4 Los irracionales se divierten y nos divierten

En Internet encontramos algunas viñetas sobre los números irracionales. Se los toma como personajes que concurren a una fiesta.

http://www.iesezequielgonzalez.com/matematicas/irracion.htm
Recuperado 10/05/09


¡Ha venido el número e?
¿eh?
¡QUE SI HA VENIDO EL NÚMERO e!
Ah ¿e? Pues ...no. No le hemos invitado
Pero... ¿por qué no? ¡Si es uno de los irracionales más famosos que existen!
Pues... porque ése nunca viene a las fiestas de los menores de 15 . Sólo va a la de los últimos años del Polimodal
¡Ya!. Bueno, ¡qué le vamos a hacer! Aquí tampoco lo entenderían
$\sqrt[7]{\frac{1}{3}}$
$\sqrt[3]{-4}$


Acabo de echar al 2 que se había colado en la fiesta
Pero, ¿cómo pudo entrar?
Se disfrazó de raíz cuadrada de 4 para engañar al portero, que es corto de vista
¡Qué país!
$\sqrt[5]{4}$
$\sqrt[3]{9}$

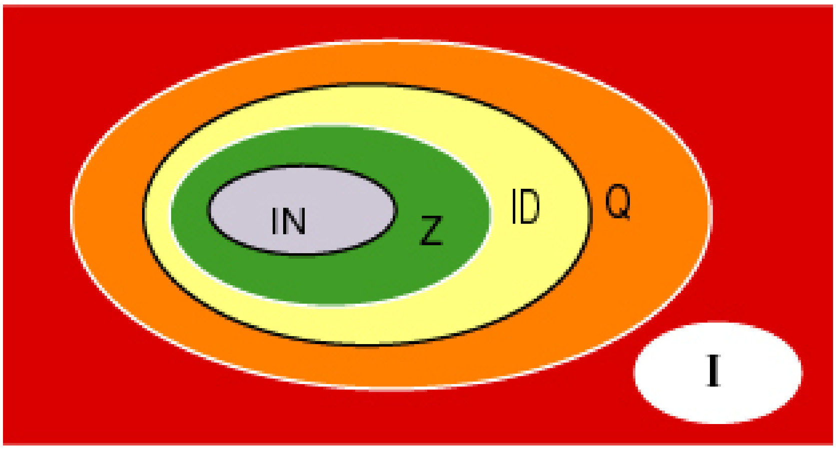
PARTE III

3. Los números reales

3.1 El conjunto IR

Sabemos que $Q=\left\{\frac{a}{b}/a\in Z,b\in Z,b\neq 0\right\}$ es el conjunto de los números racionales. Venimos de construir el conjunto I de los números irracionales es decir, de los números que no admiten escritura fraccionaria. Con ambos formamos el conjunto IR:

IR = {x : x es racional o x es no racional}



El diagrama muestra que el conjunto I de los números irracionales es un conjunto disjunto a Q:

$Q \cap \mathrm{I} = \varnothing$.

Además

$Q \cup \mathrm{I} = IR$

3.2 Convenciones

El conjunto **IR** contiene los números reales positivos y los números reales negativos.

- **IR**$^+$ es el conjunto de los reales positivos y IR$^-$ el de los reales negativos.
- **IR*** es el conjunto de los números reales sin el cero, o sea IR* = IR – {0}

- **IR**$^{+}$ es el conjunto de los números reales positivos o sea, de los números reales positivos sin el cero.
- **IR** $^{+}$***** es el conjunto de los números reales estrictamente positivos o sea, de los números reales positivos sin el cero.
- **IR** $^{-}$ es el conjunto de los números reales negativos.
- **IR** $^{-}$***** es el conjunto de los números reales estrictamente positivos o sea, de los números reales positivos sin el cero.

3.3 El orden ≤ en IR

Sean x e y dos números reales.

> Se dice que x *es menor o igual a* y, lo cual se anota $x \leq y$, para expresar que el número $y - x$ es elemento de IR^{+}

$\forall(x, y)\ (x, y) \in \mathrm{IR}^2 \quad x \leq y \Leftrightarrow x - y \in \mathrm{IR}^{-} \Leftrightarrow y - x \in \mathrm{IR}^{+}$

Usando dicha condición podemos definir en IR x IR la relación **"***menor o igual* "

> $\leq_{\mathrm{IR}}$: $\{(x, y), (x, y) \in \mathrm{IR}^2, x \leq y\}$

Recordemos que una relación es un conjunto de pares ordenados que satisfacen una condición. Es un subconjunto de un conjunto producto. En este caso de IR x IR.

No debemos confundir la condición $x \leq y$ que satisfacen los pares ordenados con la relación $\{(x, y), (x, y) \in \mathrm{IR}^2, x \leq y\}$

3.4 Valor absoluto de un número real.

Sea x un real.

> El valor absoluto de x es el mayor de los números del par $\{x, -x\}$. Se anota por IxI.

Por lo dicho es:

I x I = max {x, - x}

Resulta:

a) si x es positivo: I x I = x

b) si x es negativo: I x I = - x

O sea: El valor absoluto de x es un número real positivo.

Para el número 0, que es a la vez positivo y negativo, se tiene:

I 0 I = +0 = - 0.

3.5 El cardinal del conjunto IR

El concepto de número cardinal fue inventado por Georg Cantor en 1874. El cardinal indica el número de elementos de un conjunto, sea éste finito o bien infinito.

Sólo para ponernos de acuerdo con las notaciones, vamos a llamar cardinal de un conjunto A (anotando #(A)) al número *n* de elementos de ese conjunto. Por ejemplo, el cardinal del conjunto A = {1, 2, 3) = #(A) = 3

En efecto, A tiene 3 elementos.

También sabemos que los conjuntos infinitos IN, $\mathbb{Z}$ y Q , tienen la misma potencia, la numerable, $\aleph_0$. Se puede demostrar, que sus conjuntos potencia (esto es, el conjunto de todos sus subconjuntos), $2^{\mathbb{N}}$, $2^{\mathbb{Z}}$ y $2^{\mathbb{Q}}$, tienen la misma potencia, la del continuo, $2^{\aleph_0}$, la potencia de IR.

3.7 Operaciones y cálculos en IR

Nos referimos a las operaciones usuales: adición, resta y multiplicación. La división no es siempre posible. Podemos dividir excepto por 0.

3.7.1 Adición o suma en IR

La adición es una operación en el conjunto IR, es decir, es una función de IR x IR en IR. A la cupla (*a, b*) de reales, la función simbolizada por +, asocia otro número real anotado *a* + *b,* que es la suma de los reales *a* y *b*.

Ejemplos:

- 2 + 3 = 5
- - 4 + (-3) = +7
- $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{4+6}{8}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$ o también: 0, 5 + 0, 75 = 0, 80
- 0, 5 + 1, 2 = 1, 7 o también $\frac{5}{10}+\frac{12}{10}=\frac{17}{10}$
- $2 + \pi$

Siendo π un número irracional consta de infinitas cifras decimales que no tienen regularidad ni periodicidad conocida, sino que van cambiando hasta el infinito.

Puesto que irracional trascendente no proviene de ninguna ecuación polinómica. Solamente podemos usar su escritura posicional, buscando una aproximación conveniente.

Por ejemplo, si consideramos las primeras 18 cifras decimales se tiene: la siguiente aproximación.

Otra aproximación decimal es: 3, 14159. Usemos ésta:

2 + 3, 14159 = 5, 14159.

Es un valor aproximado.

- $2 + \sqrt{2}$

Siendo $\sqrt{2}$ número irracional consta de consta de infinitas cifras decimales que no tienen regularidad ni periodicidad conocida, sino que van cambiando hasta el infinito. Puesto que es irracional algebraico proviene de una ecuación polinómica. Podemos usar su escritura posicional, buscando una aproximación conveniente. Por ejemplo 1,4142135 es una aproximación a 7 cifras decimales del número irracional $\sqrt{2}$.

Entonces tenemos dos posibilidades:

- dejamos la suma como 2 + $\sqrt{2}$;
- o hacemos el cálculo aproximado

2 + 1,4142135 = 3, 4142135.

Con razonamientos similares podemos calcular estas sumas en IR:

- $\sqrt{2} + \sqrt{3}$
- $\pi + \sqrt{2}$
- $\frac{1}{3} + \sqrt{3}$

3.7.2 Propiedades de la adición en IR.

Recapitulemos, en el siguiente cuadro, las propiedades de la adición definida en el conjunto IR.

Asociatividad	$\forall(a, b, c)\ (a, b, c) \in IR^3 : (a + b) + c = a + (b + c)$
Existencia de elemento neutro	$(\exists\ 0)(0 \in IR)\ (\forall a)\ (a \in IR)$, tal que $a + 0 = 0 + a = a$
Existencia de elemento opuesto para cada elemento	$(\forall a)\ (a \in IR)\ (\exists\ -a)(-a \in IR)$ tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$
Conmutatividad	$\forall\ (a, b)\ (a, b) \in IR^2 : a + b = b + a$

Nos damos cuenta que las propiedades de la adición le dan a IR estructura de grupo abeliano.

(R, +) denota el grupo aditivo de los números reales

3.8 Multiplicación en IR

La multiplicación es una operación en el conjunto IR, es decir, es una función de IR x IR en IR. A la cupla (*a, b*) de reales, la función simbolizada por x, asocia otro número real anotado *a* x *b,* que es el producto de los reales *a* y *b*.

Ejemplos:

- 2 x 3 = 6
- - 4 x (-3) = 12
- $\frac{1}{2} x \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$ o también: 0, 5 x 0, 75 = 0, 375
- 0, 5 x 1, 2 = 0, 6 o también $\frac{5}{10} x \frac{12}{10} = \frac{60}{100} = \frac{6}{10}$
- 2 x π

Para calcular el producto dado tenemos que usar una aproximación decimal como por ejemplo: 3, 14159

Luego, 2 x 3, 14159 = 6, 28318 que, por tanto, es un valor aproximado.

- 2 x $\sqrt{2}$

Podemos usar su escritura posicional, buscando una aproximación conveniente. Por ejemplo 1,4142135 es una aproximación a 7 cifras decimales del número irracional $\sqrt{2}$.Entonces dejamos el producto como 2 x $\sqrt{2}$ o hacemos el cálculo aproximado 2 x 1,4142135 = 2, 8284270.

Con razonamientos similares podemos calcular estos productos en IR:

- $\sqrt{2}$ x $\sqrt{3}$
- π + $\sqrt{2}$
- $\frac{1}{3}$ x $\sqrt{3}$
- $\sqrt{3}.\sqrt[3]{2}$

3.8.2 Propiedades de la multiplicación

En el siguiente cuadro se consignan las propiedades de la multiplicación en IR.

Asociatividad.	$\forall(a, b, c)\ (a, b, c) \in \mathrm{IR}^3 : (a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
Distributividad con respecto a la adición.	$\forall(a, b, c)\ (a, b, c) \in \mathrm{IR}^3 : a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$ También vale la distributividad por derecha
Existencia de elemento identidad	$(\exists\ 1)(1 \in \mathrm{IR})\ (\forall a)\ (a \in \mathrm{IR})$, tal que $a \times 1 = 1 \times a = a$
Existencia de elemento inverso para cada elemento no nulo.	$(\forall a)\ (a \in \mathrm{IR}^*)\ (\exists\ 1/a)(1/a \in \mathrm{IR})$ tal que $a \times 1/a = 1/a \times a = 1$
Conmutatividad.	$\forall\ (a, b)\ (a, b) \in \mathrm{IR}^2 : a \times b = b \times a$

Gran parte del Álgebra contemporánea consiste en el estudio de ciertas estructuras abstractas, cada una de las cuales reaparece insistentemente en los más diversos sectores de la Matemática.

PARTE IV

EL ÁLGEBRA DE LOS NÚMEROS REALES

4. Un Álgebra

Un Álgebra es una estructura algebraica dentro del Álgebra contemporánea. Hay muchos ejemplos como el Álgebra de los números reales, de los números complejos, de las funciones reales, de las matrices cuadradas reales de orden 2, de las funciones polinómicas reales, etc..

4. 1 El Álgebra de los números reales

Se requieren dos estructuras algebraicas: la de anillo y la de espacio vectorial.

4.1.1 El cuerpo IR de los números reales

IR, con respecto a las operaciones usuales, adición y multiplicación tiene estructura algebraica de cuerpo. Un cuerpo es un anillo especial. En efecto en IR están definidas dos operaciones internas: adición y multiplicación como vimos en el apartado anterior. Esas operaciones cumplen con ciertas propiedades.

- Con respecto a la adición IR tiene estructura algebraica de grupo conmutativo. Se anota por (IR , +)

Por esa razón la sustracción también es una ley de composición en IR. La escritura $a - b$ equivale a $a + (-b)$.

- Con respecto a la multiplicación revisamos las propiedades que nos permiten asegurar que el conjunto IR tiene estructura algebraica de cuerpo.
Se anota por (IR , + , x).

En ciertas ocasiones es posible construir, mediante división, el número real x/y a partir de x e y, siempre que $y \neq 0$.

> Dividir por un número real no nulo, equivale a multiplicar por su inverso.

La división no es operación, pero es cierto que podemos dividir por cualquier real, excepto por $y = 0$.

4. 1.2 El espacio vectorial de IR sobre IR

La estructura de espacio vectorial es puramente algebraica, pero se inspira en conceptos geométricos. Para esta estructura interviene, además de la noción de operación binaria interna, la de operación binaria externa como función de K x V en V, donde los elementos de V son los denominados *vectores* y K es un cuerpo, a cuyos elementos se les llama *escalares.*

Tomemos el caso puntual del espacio vectorial IR sobre IR.
K es el mismo IR, o sea es el cuerpo de escalares. V es también IR. Vale decir los reales también cumplen el papel de vectores.

1.- En IR está definida una operación binaria interna; la adición en IR. Por lo que vimos anteriormente IR tiene estructura algebraica de grupo conmutativo.
(IR , +) es grupo conmutativo.
2.- También podemos definir una operación externa como función
. : K = IR x V = IR en IR:
$(k , u) \rightarrow k . x$ ($k \in K = IR$, $u \in IR$),
llamada multiplicación por un escalar.
Se puede demostrar el cumplimiento de las propiedades siguientes:
v_1: Asociativa mixta
(k. k´). u = k. (k.´u)
v_2: Modular
1. u = u.

Las operaciones definidas en 1 y en 2 están relacionadas por las propiedades

v_3 : Distributiva

k. (u + v) = k. u + k. v.

v_4: Distributiva mixta o combinada:

(k + k´). u = k. u + k´. u.

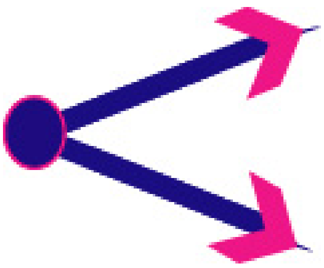
Por lo dicho:

El conjunto IR de los números reales está munido para la adición de números y la multiplicación de un escalar (número real) por un vector (número real), de la estructura de espacio vectorial sobre IR.

4.1.3 El ÁLGEBRA DE LOS NÚMEROS REALES.

IR posee doble estructura algebraica.

1.- La estructura de cuerpo (un cuerpo es un anillo especial) con respecto a dos operaciones internas: la adición y la multiplicación.



2.- La de estructura de espacio vectorial con respecto a una operación interna: la adición y otra externa: la multiplicación en IR. En este caso la multiplicación interna funciona como operación externa. Los mismos números reales actúan como escalares y como vectores.

Por 1 y 2 estamos ante la estructura algebraica de álgebra:

El ÁLGEBRA DE LOS NÚMEROS REALES.

Fuentes bibliográficas

- Alderete M. J. y otros (1996), *El mundo de los números y la Aritmética*. Mendoza: Secretaría de Educación. DGE. Gobierno de Mendoza.

- Briand, J. y Chevalier, M-C. (1995). *Les enjeux didactiques dans l'enseignement des mathématiques*. Paris: Hatier.

- Brousseau, G., Duval, A. y Vinrich, G. (1995). *Thèmes mathématiques pour la préparation du concours CRPE*. Talence: IREM d' Aquitaine.

- Dorronsoro, G. ; Hernández, E. (1996). *Números, grupos y anillos.* Madrid: Universidad Autónoma de Madrid.

- Gentile, E. (1985). *Aritmética Elemental*. Monografía Científica. Serie de Matemática. Buenos Aires: Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad nacional de Buenos Aires.

- Paenza, A. (2005). Matemática ... Estás ahí? Sobre números, personajes, problemas y curiosidades. Buenos Aires: Siglo XXI Editores Argentina S.A.

- Trejo, C. A. (1978). *Concepto de número*. Buenos Aires: Editorial OEA.

- Trejo, C. A. (1978). *Matemática Elemental Moderna: Estructura y Método*. Buenos Aires: EUDEBA