# Los significados de las fracciones[1]: una perspectiva fenomenológica

**Profesor Omar Malet**

**Arrecifes _Buenos Aires**

- Coordinador del Equipo Técnico de Matemática del Programa Provincial de Evaluación Educativa. Dirección de Prospectiva e Investigación Educativa. Dirección Provincial de Planeamiento. Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires.
- Colaborador de la Revista mendom@tica

[1] En este artículo se hace referencia exclusivamente a las fracciones de la forma $\frac{a}{b}$, en las que tanto a como b son números *naturales*. El lector podrá evaluar por sí mismo cuáles de los significados atribuibles a las fracciones de esta clase particular son traspolables a las fracciones que se definen en base a pares de números *enteros*.

Palabras clave: fracciones, razones, números fraccionarios,

## Introducción

Los enseñantes de Educación Primaria y Secundaria (y también los de Educación Superior…) constatamos cotidianamente que el concepto de fracción opone intensa resistencia a la comprensión de nuestros alumnos.

En el mismo sentido se alinean los resultados de diversos operativos de evaluación masiva y estandarizada (por caso, los del Programa de Evaluación de la Calidad Educativa de la Provincia de Buenos Aires:
http://abc.gov.ar/lainstitucion/organismos/prospectivaeduc/default.cfm ).

En este artículo, nos proponemos revisitar el concepto de fracción en clave fenomenológica.

Según Freudenthal, los objetos matemáticos (más o menos formales) “ordenan” familias de fenómenos, en la medida en que permiten clasificarlos en función de sus regularidades.

La fenomenología de un objeto matemático es la descripción del objeto en relación con los fenómenos de los cuales emerge o a los cuales subyace: qué fenómenos puede organizar el objeto, a cuáles se extiende, cómo actúa sobre ellos, qué poder nos confiere sobre esos fenómenos.

## Hacia una fenomenología de las fracciones

Un análisis fenomenológico del concepto de fracción demanda, entonces, atender a la pluralidad de significados e interpretaciones que las fracciones admiten y adquieren, según el contexto en que se las emplee.

El concepto de fracción es la síntesis compleja de tales significados e interpretaciones, por lo que tiene el status de un *megaconcepto*.

En un primer acercamiento, reconocemos en el megaconcepto de fracción dos *dimensiones*:

- ✓ Una *dimensión dinámica*, que hace referencia a *acciones* como fraccionar (cortar en partes iguales, y seleccionar algunas), medir (comparar una dimensión de un objeto con un referente o unidad), comparar o relacionar cantidades, y operar (aplicar un operador de la forma $\frac{a}{b}$ sobre una situación, o dividir dos números naturales, o repartir equitativamente).
- ✓ Una *dimensión estática*, que hace referencia a los *productos* o *resultados* de aquellas acciones: la relación entre las partes y el todo fraccionado, la medida, el índice o razón o tasa de comparación entre cantidades, el resultado de la operación.

Por ejemplo, la fracción $\frac{3}{5}$ puede describir tanto la acción de repartir equitativamente un lote de 3 ha entre 5 herederos como el resultado de esa acción (¿Qué área del lote (en ha) le corresponde a cada heredero?).

Ahora bien: las dimensiones identificadas se juegan en distintos significados de las fracciones. A continuación los enumeramos, sin pretensiones de exhaustividad, ni de evitar solapamientos entre un significado y otro.

Para cada significado formulamos, además, algunas observaciones de tono didáctico: qué dificultades se les asocian, que aportes específicos hacen a la construcción del megaconcepto de fracción, etcétera.

**a) La fracción como expresión que vincula la parte con el “todo” (continuo o discreto).**

En este caso, la fracción es la respuesta a la pregunta *¿Qué parte es (del entero o del todo o de la unidad de que se trate)?*

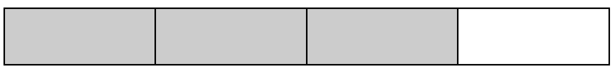
El todo en cuestión puede ser de naturaleza *continua* (cuando es “medible”, o sea, cuando se puede medir alguna de sus dimensiones –longitud, área, volumen, etcétera–) o de naturaleza *discreta* (cuando es “contable”, es decir, cuando es un conjunto cuyos elementos se pueden contar –un conjunto de caramelos, por ejemplo–).

**Cuando el todo es continuo…**

En los libros de texto y en las aulas, el todo continuo que se privilegia suele ser de índole espacial; en él, la dimensión medible a la que se refiere la fracción es una longitud, o un área, o un volumen.

En particular, son muy habituales las presentaciones en las cuales el todo continuo es una región o superficie, y la dimensión medible, el área. En ellas, la fracción indica una subárea de la región o superficie unitaria.

Ejemplo: ¿Qué parte de la figura se ha sombreado? ($\frac{3}{4}$)



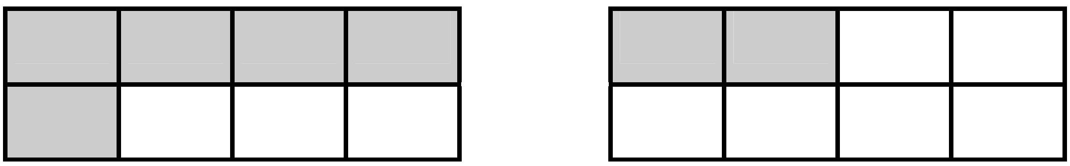
Hay evidencias de que este significado de las fracciones es el más fácil de aprehender. Sin embargo, trae algunas dificultades de las que es necesario hacerse cargo didácticamente (sin que ello implique interdicción alguna respecto del trabajo con esta interpretación de las fracciones).

En primer lugar, no es infrecuente que los alumnos puedan responder que la parte sombreada en la figura del ejemplo anterior es $\frac{3}{4}$, pero que no admitan que también se han sombreado $\frac{3}{4}$ de la figura siguiente, “porque no está dividida en partes iguales”:

Ambas situaciones difieren en el grado en que la percepción comanda la resolución: la primera situación perceptivamente resoluble en mayor grado que la primera; la segunda, en cambio, compromete más el concepto mismo de fracción. Podemos preguntarnos si no abusamos, en las aulas, de situaciones semejantes a la primera, en detrimento de situaciones como la segunda.

En segundo lugar, este significado de las fracciones no es adecuado para las fracciones “impropias” (fracciones mayores que la unidad); por ejemplo, los alumnos tienden a interpretar la siguiente representación de $\frac{5}{3}$ como $\frac{5}{6}$ (hay 5 partes sombreadas de un total de 6):

Un error de tenor similar (en tanto se pierde de vista cuál es el todo de referencia) puede producirse si para resolver $\frac{5}{8} + \frac{2}{8}$ los estudiantes optan por representar los sumandos en diagramas diferentes:



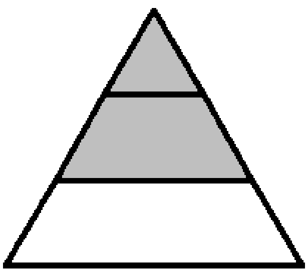
A partir de esta representación, el resultado de la suma puede ser leído como $\frac{7}{16}$; queda, así, “justificado”, además, el procedimiento al que muchos alumnos recurren para sumar números fraccionarios o racionales cuando éstos están expresados como fracciones: sumar los numeradores entre sí, y los denominadores entre sí. La frecuencia con que los alumnos utilizan el procedimiento descripto, ¿guardará relación con la uniformidad con que presentamos las fracciones, a las que ponemos en juego casi siempre en términos de subárea de una región o superficie unitaria?

Por a parte, como señalan Piaget, Inhelder y Szeminska, la comprensión de la relación arte-todo cuando el todo es continuo exige:

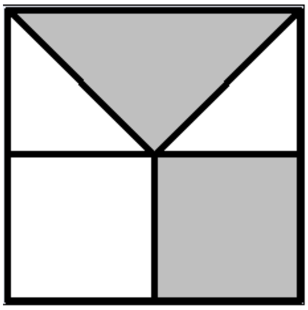
- ✓ Aceptar que el entero es divisible (los niños más pequeños se niegan a cortar el entero).
- ✓ Admitir que el todo puede cortarse en cualquier número de partes que se solicite.
- ✓ Comprender que las partes deben “agotar” el todo, o sea, que la partición del todo debe ser exhaustiva.

  Algunos estudiantes, ante la consigna de repartir equitativamente una tarta entre tres comensales, se limitan a cortar tres porciones, y descartan el resto.
- ✓ Centrar la equivalencia de las partes en su tamaño, y no, en su número o en su forma.

Si los estudiantes centran la equivalencia de las partes en el número de partes, considerarán que se han sombreado $\frac{2}{3}$ del triángulo:



Si centran dicha equivalencia en la forma de las partes, no reconocerán que se han sombreado $\frac{2}{4}$ del cuadrado:



- ✓ Distinguir entre número de cortes y número de partes (ambos números no son necesariamente iguales).
- ✓ Comprender la relación inversa entre el número de partes equivalentes y el tamaño de cada parte (cuanto mayor sea el número de partes, menor será la extensión de cada una de ellas).
- ✓ Admitir que cada parte puede transformarse en un nuevo todo (por ejemplo, podemos obtener la sexta parte de cierta totalidad dividiendo en mitades cada tercio; para la división en mitades, cada tercio, que en relación con la totalidad original es una parte, funciona como un todo).
- ✓ Admitir que el todo es la unión de las partes (es decir: el total se conserva aunque haya sido dividido en partes).

**Cuando el todo es discreto…**

En este caso, la fracción no indica la relación entre una parte de un todo continuo o medible, y ese todo, sino la relación entre una parte de un todo discreto o contable, y ese todo.

El todo es ahora un conjunto discreto de objetos, y la parte, un subconjunto de ese conjunto.

Ejemplo: Emilia ha comido 5 de los 12 alfajores de una caja. ¿Qué parte de los alfajores comió? ($\frac{5}{12}$)

Este punto de vista tampoco facilita la interpretación de las fracciones impropias (si una fracción expresa una parte de un todo, es poco coherente que la parte sea mayor que el todo...).

Además, no es inhabitual que, en el contexto discreto, los alumnos relacionen un subconjunto con otro subconjunto, y no, con el conjunto de referencia. En el ejemplo: algunos alumnos darán como respuesta $\frac{5}{7}$, poniendo en relación la cantidad de alfajores que Emilia comió con la de alfajores que todavía no comió, en lugar de hacerlo con el total de alfajores en la caja.

Sin embargo, este significado de las fracciones aporta elementos diferenciales respecto de la interpretación más tradicional en términos de totalidad continua.

Por un lado, obliga a considerar explícitamente la totalidad a la que la fracción se refiere (en el ejemplo, los 12 alfajores). En cambio, en el contexto “parte de una totalidad continua”, las dimensiones del todo suelen permanecer hasta cierto punto implícitas[2].

Por otro lado, la comprensión de la fracción como expresión de la relación subconjunto/conjunto discreto de objetos abre naturalmente la puerta hacia las nociones de razón, proporción y porcentaje: en contextos discretos, es más sencillo darse cuenta de que $\frac{3}{4}$ –por ejemplo– significa “3 de cada 4”, o “75 de cada 100”, o “75 %”[3].

**b) La fracción como operador.**

En este caso, la fracción actúa u opera sobre un conjunto discreto, una cantidad de cierta magnitud o un número.

Ejemplo: En un monte de 150 árboles frutales, $\frac{2}{3}$ son limoneros, y el resto, naranjos. ¿Cuántos limoneros hay en el monte?

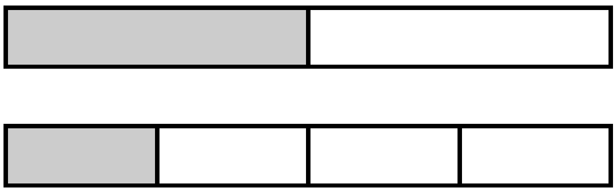
Ya comentamos que uno de los efectos posibles de presentar las fracciones sólo (o prevalentemente) como expresión de la relación parte/todo continuo, es la tendencia de los alumnos a ignorar el todo de referencia.

[2] Véase, también, **La fracción como operador.**
[3] Véase, también, **La fracción como razón o recurso para comparar dos conjuntos o dos medidas.**

Tal tendencia puede ponerse en tensión, y reelaborarse, planteando en el aula situaciones como ésta, afín a la idea de operador:

El sábado a la noche, Valentín y Tomás fueron a bailar. Durante la salida, Valentín gastó la mitad (o $\frac{1}{2}$) del dinero que había llevado; Tomás gastó la cuarta parte (o $\frac{1}{4}$) de su dinero. ¿Quién gastó más? ¿Por qué?

Los alumnos que no adviertan la necesidad de conocer cuánto dinero había llevado cada uno de los chicos para poder responder, sostendrán que quien gastó más dinero es Valentín, porque, haciendo pie en una representación usual como la que sigue, en la que las totalidades de referencia se han igualado sin que haya información que autorice a hacerlo, $\frac{1}{2}$ es más que $\frac{1}{4}$:



Cuando la fracción operador opera en contextos discretos, los alumnos pueden cometer dos errores, que tienen su origen en la confusión conjunto-elemento.

Mostrémoslos a través de un ejemplo:

*En una caja hay 15 bolillas; Felipe retira* $\frac{2}{5}$ *de las bolillas de la caja. ¿Cuántas bolillas retiró?*

La resolución de la situación requiere fraccionar el conjunto de 15 bolillas en 5 subconjuntos (tal como indica el denominador) de 3 bolillas cada uno, y tomar 2 de esos subconjuntos (tal como indica el numerador): Felipe retiró 6 bolillas.

Algunos alumnos fraccionarán el conjunto de 15 bolillas en subconjuntos de 5 bolillas cada uno, tomarán 2 de esos subconjuntos, y responderán que Felipe retiró 10 bolillas; estos alumnos no "leen" el denominador en términos de subconjuntos, sino en términos de elementos, esto es, en términos de cardinal o cantidad de elementos de cada subconjunto.

Otros alumnos fraccionarán correctamente el conjunto de 15 bolillas en 5 subconjuntos de 3 bolillas cada uno… pero tomarán 2 de las bolillas de uno de esos subconjuntos, y responderán que Felipe retiró 2 bolillas; estos alumnos no "leen" el numerador en términos de subconjuntos, sino en términos de elementos.

Algunos alumnos pueden cometer ambos errores simultáneamente (formar subconjuntos de 5 elementos, tomar 2 elementos de uno de los subconjuntos), puesto que éstos son compatibles entre sí.

**c) La fracción como representante de un punto de la recta numérica.**

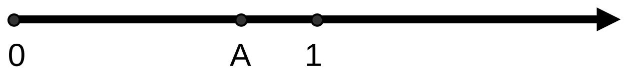
Ante todo, ¿por qué aludimos a una fracción como *representante* de un punto de la recta numérica? ¿Por qué no decimos –directamente– *la fracción como punto de la recta numérica*?

Matemáticamente, los puntos de la recta numérica se corresponden biunívocamente con los números reales; en virtud de tal correspondencia, cada punto de la recta numérica se puede *identificar* con un número real; esta identificación autoriza a hablar de los puntos de la recta (objetos geométricos) como si efectivamente fueran números.

A su vez, una fracción es una escritura o notación que *representa* a un número real de un tipo particular: un número fraccionario o racional. La fracción no *es* el número (no se puede identificar con él), sino uno de los modos de escribirlo o representarlo (así, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{6}$ o 0,5 son otros tantos modos de escribir o representar al mismo número).

Si una fracción es una representación de un número, y éste es identificable con un punto de la recta numérica, cabe interpretar a la fracción como *representante* de dicho punto, aunque es erróneo *identificarla* con él.

Ejemplo: ¿A qué número corresponde el punto A de la recta numérica? Exprésalo como fracción. ($\frac{3}{4}$ es una respuesta posible, aunque no, la única…)




Considerar a las fracciones como representantes de puntos de la recta numérica permite llamar la atención sobre el hecho de que las fracciones representan números en y por sí mismas (los números asociados a aquellos puntos); en cambio, desde las interpretaciones anteriores, las fracciones quedan más ligadas a un objeto de referencia (el todo continuo, el todo discreto, el objeto sobre el cual operan).

¿En qué sentido esta perspectiva –las fracciones como representantes de puntos de la recta numérica– hace aportes específicos a la noción de fracción?

En primer lugar, facilita la comprensión de las fracciones impropias (una fracción representa a un punto de la recta numérica, y a un número; el punto bien puede estar a la derecha de 1; el número bien puede ser mayor que 1).

En segundo lugar, contribuye a que el conjunto de los números representables por fracciones (esto es, el conjunto de los números fraccionarios o racionales) sea concebido y hasta visualizado como una extensión o ampliación del de los números naturales.

En tercer lugar, puede ser abordada en simultáneo con la medición de magnitudes mediante instrumentos dotados de escalas graduadas (que pueden considerarse como materializaciones de la recta numérica).

Dos dificultades a contemplar cuando introducimos las fracciones como representantes de puntos de la recta numérica:

- ✓ Son muchos los estudiantes que atribuyen significados equivalentes a la línea de fracción y la coma decimal; estos estudiantes considerarán, por ejemplo, que a $\frac{3}{5}$ y 3,5 les corresponde el mismo punto en la recta numérica (un punto que equidista de 3 y de 4).
- ✓ Por influjo del modelo predominante, que consiste en interpretar a las fracciones como expresiones de la relación parte/todo continuo, algunos alumnos tomarán como todo al segmento de recta numérica representado (prescindiendo de la escala en que está graduada dicha recta), y, en el ejemplo, le harán corresponder al punto A la fracción $\frac{3}{8}$ (la longitud del segmento cuyos extremos son 0 y A es, efectivamente, $\frac{3}{8}$ de la longitud del segmento de recta dibujado).

**d) La fracción como resultado de una división (caso particular: reparto equitativo).**

En este caso, la fracción da respuesta a la pregunta *¿Cuánto da (una división entre dos números naturales)?* o, en situaciones reales, *¿Cuánto le corresponde a cada uno (en un reparto equitativo)?*

Ejemplo: Si se reparten equitativamente 3 litros de leche entre 7 chicos, ¿cuánto le corresponde a cada uno de ellos? ($\frac{3}{7}$)

En otras palabras, 3 dividido 7 da por resultado $\frac{3}{7}$ (aunque se tienda a pensar que $\frac{3}{7}$ es una división no resuelta más que el resultado de una división...).

El hecho de que muchos chicos no se percaten de que las fracciones expresan exactamente el resultado de la división entre dos números naturales parece vincularse con un trabajo escolar insuficiente sobre esta interpretación de las fracciones.

**e) La fracción como razón o recurso para comparar dos conjuntos o dos medidas.**

La pregunta disparadora es, en este caso: *¿En qué relación están?*, que conduce, por ejemplo, a respuestas tales como:

- ✓ El número de alumnos de Séptimo “A” es $\frac{4}{5}$ del de Séptimo “B” (comparación entre conjuntos).
- ✓ La cantidad de alumnas mujeres de Séptimo “A” es $\frac{4}{5}$ de la cantidad total de estudiantes del curso (comparación entre un subconjunto y el conjunto en el cual está incluido).
- ✓ Mara pesa $\frac{4}{5}$ de lo que pesa Rita (comparación entre medidas).

Es interesante notar que la comparación se puede invertir fácilmente: el número de alumnos de Séptimo “B” es $\frac{5}{4}$ del de Séptimo “A”, la cantidad total de estudiantes de Séptimo “A” es $\frac{5}{4}$ de la cantidad de alumnas mujeres del curso, Rita pesa $\frac{5}{4}$ de lo que pesa Mara.

Es decir: este significado contextual de las fracciones permite reflexionar con los alumnos acerca de la inexistencia de una unidad o un todo, naturales y absolutos; cualquiera de los términos de la comparación puede funcionar como unidad o como todo.

Pero permite también inscribir el trabajo en el campo conceptual de las razones, las proporciones y los porcentajes: que $\frac{4}{5}$ de los estudiantes de Séptimo “A” sean mujeres significa que 4 de cada 5 estudiantes lo son, o que 8 de cada 10 estudiantes lo son, o que 80 de cada 100 estudiantes lo son, o que el 80 % de los estudiantes lo son.

Sin embargo, una precisión conceptual resulta necesaria. Formalmente, una *fracción* es un par ordenado de números enteros, el segundo de los cuales es distinto de cero (aun cuando en este artículo, como ya señalamos, sólo nos referimos a las fracciones determinadas por pares ordenados de números naturales).

Una *razón*, en cambio, es un par ordenado de cantidades de magnitudes (por ejemplo, el valor energéntico de ciertas galletitas es de *125 kcal* cada *30 g*); cada una de dichas cantidades se expresa mediante la conjunción de un número real y una unidad de medida (*125* y *kcal*; *30* y *g*).

Los números reales que participan de una razón pueden ser *cualesquiera*; en particular, y a diferencia de lo que sucede con las fracciones:

- ✓ El segundo número real del par puede ser cero; por ejemplo, si en un curso hay 25 varones y ninguna mujer, la razón de la cantidad de varones a la de mujeres es 25 a 0.
- ✓ La razón puede ser un número irracional, como en el caso de la razón entre la longitud de una circunferencia y su diámetro, que es el número irracional $\pi$.

**f) La fracción como probabilidad.**

Ejemplo: Si en una bolsa hay cinco bolillas rojas y quince bolillas azules, ¿cuál es la probabilidad de extraer –sin mirar– una bolilla roja? ($\frac{5}{20}$)

Puede ser interesante discutir con los alumnos si la pregunta anterior admite como respuesta $\frac{1}{4}$ (la fracción que resulta de simplificar $\frac{5}{20}$), o, en general, cualquier fracción equivalente a $\frac{5}{20}$ (por ejemplo, $\frac{6}{24}$).

En la medida en que la probabilidad de un suceso es un número (real), tanto $\frac{5}{20}$ como $\frac{1}{4}$ o $\frac{6}{24}$ son respuestas legítimas, ya que todas ellas representan al mismo número. No obstante, ¿conservan todas ellas el sentido de la pregunta planteada? $\frac{5}{20}$ indica que 5 de las 20 bolillas de la bolsa son rojas; $\frac{1}{4}$ indica que la cuarta parte de las bolillas de la bolsa son rojas; pero…¿cómo interpretar *contextualmente* $\frac{6}{24}$, aunque *numéricamente* sea una respuesta tan adecuada como las dos anteriores?

Disponer de este significado de las fracciones (la fracción como probabilidad) puede facilitar el proceso de comparación de determinadas fracciones. En efecto: $\frac{11}{16}$, ¿es menor que $\frac{12}{17}$? ¿Es igual? ¿Es mayor?

En términos de probabilidad: si en una bolsa hay 11 bolillas rojas y 5 bolillas azules, la probabilidad de extraer al azar una bolilla roja es $\frac{11}{16}$ (hay 11 bolillas rojas sobre un total de 16 bolillas); si se agregara a la bolsa otra bolilla roja, la probabilidad de sacar una bolilla roja aumentaría (hay la misma cantidad de bolillas azules que antes, y una bolilla roja más) y sería de $\frac{12}{17}$ (hay ahora 12 bolillas rojas, y 17 bolillas en total); por lo tanto, $\frac{11}{16}$ es menor que $\frac{12}{17}$.

Claro está que para que este razonamiento resulte espontáneo es condición necesaria estar familiarizado con las fracciones como expresión de probabilidades.

## Reflexiones finales

Como educadores solemos preguntarnos, no sin desesperanza, cómo es posible que nuestros alumnos tengan las dificultades que tienen con las fracciones, siendo que las enseñamos en casi todos los cursos de la escolaridad básica.

Quizá no sea ajeno a la respuesta el carácter monocorde con que curso tras curso volvemos sobre las fracciones, enfatizando sólo uno de sus significados posibles: el de partes de un todo, y, más puntualmente, el de subáreas de una región o superficie unitaria, en el cual insistimos y persistimos recurriendo a las tradicionales tortas, pizzas y tabletas de chocolate.

¿Cuáles son los riesgos de una presentación tan uniforme?

En primer lugar, desde el punto de vista conceptual, nuestros alumnos pueden desarrollar una visión sesgada, incompleta y parcial del megaconcepto de fracción, que tal vez esté en la raíz de las dificultades con las que repetidamente tropiezan.

En segundo lugar, desde el punto de vista de la psicología del aprendizaje: ¿Es el significado "subárea de una región unitaria" el más comprensible para *todos* los estudiantes? Si bien es deseable que *todos* los alumnos construyan el concepto de fracción desde *todas* las interpretaciones que éste admite, también es deseable que los primeros encuentros con el concepto respondan a la interpretación que les sea más cercana.

El docente que intencionalmente pueda proponer situaciones que movilicen significados e interpretaciones diversos del concepto de fracción (subárea de una región unitaria, pero también subconjunto de un conjunto discreto de objetos, o punto en la recta numérica, o recurso para comparar, etcétera) estará en mejores condiciones para acompañar a sus alumnos que aquél que sólo apele a un significado único (subárea de una región unitaria);

en este último caso, el alumno que no logre comprender ese significado no será confrontado con significados alternativos, y quedará expuesto a reincidir en el fracaso.

Finalmente, desde el punto de vista de la gestión institucional, si se toman en cuenta los

diversos significados del concepto de fracción, es posible distribuirlos racionalmente en una secuencia en la que grado (o año) tras grado (o año) se vuelva sobre el concepto, pero en espiral, desde interpretaciones diferentes, enriqueciéndolo, complejizándolo, complementando facetas, evitando redundar innecesariamente en el mismo significado y descuidar los otros (cayendo, sin intenciones de hacerlo, en una suerte de “más de lo mismo, y de lo demás, nada”).

En otras palabras: acordar institucionalmente cómo se secuencian los distintos significados asociados a las fracciones puede contribuir a articular y capitalizar esfuerzos docentes a partir de reasignar responsabilidades en el tratamiento del concepto.

## Bibliografía


- Bressan, A. *Los principios de la Educación Matemática Realista.* En: Alagia, H.; Bressan, A.; Sadovsky, P. (2005). *Reflexiones teóricas para la Educación Matemática.* Buenos Aires, del Zorzal.
- Yaksich, F. (a cargo de la producción colectiva) (2001). *La enseñanza de las fracciones en el 2do ciclo de la Educación General Básica. Obra colectiva de los docentes de la Red de escuelas de Campana.* Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires. Plan de desarrollo estratégico de Campana. Bureau Internacional de Educación UNESCO.
- Chamorro, C.; Belmonte, J. M. (1994). *El problema de la medida. Didáctica de las magnitudes lineales.* Madrid, Síntesis.
- Corvalán J. C.; de Martino, E.; Pizzo, A.; Videla, J.; González, A. (1993). *El proceso de enseñanza-aprendizaje de la noción de fracción.* Dirección de Capacitación, Perfeccionamiento y Actualización Docente. Secretaría de Educación y Cultura. Municipalidad de la Ciudad de Buenos Aires.
- Damisa, C.; Fripp, A.; Pazos, L.; Rodríguez Rava, B.; Vilaró, R. (2006). *Cuadernos de Estudio II*. Montevideo, Programa para el Mejoramiento de la Enseñanza de la Matemática, Administración Nacional de Educación Pública.
- Díaz Moreno, L. (1998). *Reflexiones didácticas en torno a Fracciones, Razones y Proporciones.* Santiago de Chile, Programa MECE Media, Ministerio de Educación.
- Dickson, L.; Brown, M.; Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas.* Barcelona, Ministerio de Educación y Ciencia/Labor.
- Malet, O. (2002). *Matemática 1. Las pruebas de matemática. Marco referencial.* La Plata, Programa de Evaluación de la Calidad Educativa, Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires.
- Programa de Evaluación de la Calidad Educativa (2002). *Guía para la lectura de los resultados y orientaciones para el trabajo institucional.* La Plata, Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires.