Los instrumentos de Geometría y los problemas de construcción

El Equipo

La idea central del artículo es abordar los problemas geométricos de construcción. Previamente se hace un tratamiento breve acerca de los problemas matemáticos y la naturaleza de los objetos geométricos y su representación en el plano. Por otra parte, se señala que no todo problema geométrico está en la categoría de problema de construcción. Éstos requieren del uso de los instrumentos geométricos: regla, falsa escuadra, escuadra y compás, que se definen por su función. Cada uno de ellos está vinculado con una geometría kleiniana. Se pone énfasis en destacar que no deben confundirse con los instrumentos para realizar dibujos técnicos. Se finaliza con los denominados programas de construcción, con reglas de perspectiva y con algunas conclusiones.

El artículo es una reelaboración de la Sección 3 *Las construcciones geométricas* del libro *Introducción a la Geometría*.[1]

Palabras clave: problemas geométricos de construcción, instrumentos geométricos, geometrías kleinianas, instrumentos geométricos y geometrías de Klein.

[1] Alderete, M. J. y cols. (1999). *Introducción a la Geometría*. Mendoza: DGE. Subsecretaria de Educación.

INTRODUCCIÓN

En este artículo ponemos el foco de la atención en la principal actividad geométrica didáctica: *la resolución de problemas.* Dentro de éstos puntualizamos en los problemas de construcción y en los instrumentos geométricos.

Con respecto a los instrumentos geométricos destacamos su tratamiento adecuado, que está relacionado con la definición de cada uno de ellos atendiendo a su función específica.

Los únicos instrumentos geométricos son: la regla, la falsa escuadra, la escuadra y el compás.

Estará pensando, por ejemplo, que todo el mundo conoce lo que es una regla geométrica. Pero aunque no lo crea, no es así. La regla geométrica no tiene graduación y carece de bordes paralelos. Por eso no es lo mismo que una regla para dibujo técnico.

Otra razón para escribir este artículo fue mostrar que cada instrumento geométrico está vinculado con ciertas propiedades geométricas, mejor dicho está relacionado con un grupo de transformaciones o lo que lo es lo mismo, con una geometría kleiniana.

En cuanto a los problemas de construcción representan una categoría dentro de los problemas geométricos que son, sin ninguna duda, problemas matemáticos.

Aluden a objetos geométricos en cualquier espacio geométrico; por tanto son entes ideales considerados, en las geometrías puntuales, como conjuntos de puntos.

Si los representamos en un papel (representaciones planas) obtenemos un dibujo geométrico que no es ya el objeto, sino su representación, usualmente denominada figura geométrica.

En síntesis, es imposible abordar en este artículo una teoría sistemática de las construcciones geométricas, pero sí podemos introducirnos brevemente en una teoría elemental de las mismas.

Según el pensamiento del matemático Trejo (1968):

> Una teoría elemental de las construcciones geométricas es muy orientadora en la enseñanza de la Geometría, sobre todo por dos motivos:
> - porque una tal teoría hace ineludible una definición matemática precisa y funcional de cada instrumento geométrico;
> - porque arroja luz sobre la sistematización de la geometría elemental, poniendo más claramente de relieve los cauces de ordenación natural.

PARTE I

Los problemas geométricos

Cuando tratamos sobre problemas geométricos aludimos a una clase puntual de problemas matemáticos. Por eso es válido hacer una breve referencia a éstos.

Según cita de M. del P. Pérez, (1993), autores como Schoenfeld (1983), Stanic y Kilpatrick (1988) o Wuebster (1979) han llegado a recopilar hasta 14 significados diferentes de dicho término.

Por su parte Schoenfeld (1985), describe los cuatro enfoques que, en su opinión, han seguido los trabajos sobre resolución de problemas a nivel internacional:

- Problemas presentados en forma escrita, a menudo problemas muy sencillos pero que colocan la Matemática en el contexto del “mundo real”.
- Matemática aplicada o modelo matemático, es decir, el uso de Matemática sofisticada para tratar los problemas que reflejan el “mundo real”.
- Estudio de los procesos cognitivos de la mente, consistente en intentos de exploración detallada de aspectos del pensamiento matemático en relación con problemas más o menos complejos.
- Determinación y enseñanza de los tipos de habilidades requeridas para resolver problemas matemáticos complejos. Enfoque con base, en gran medida, en la obra de Polya, G. (1945).

Nos parece interesante la definición del término, aportada por Schoenfeld, (1985), cuando hace referencia a que por el uso de problemas o proyectos difíciles los alumnos aprenden a pensar matemáticamente. Entendiendo la calificación de “difícil” como una dificultad intelectual para el resolutor, es decir, como una situación para la cual éste no conoce un algoritmo que lo lleve directamente a la solución.

De esto se desprende que la dificultad de un problema es relativa, pues depende de los conocimientos y habilidades que posea el que está frente al problema.

En cuanto a la resolución de problemas tenemos en cuenta a Alderete (2009) cuando expresa que la resolución de problemas promueve un aprendizaje desarrollador y, un análisis histórico del desarrollo de la resolución de problemas, permite caracterizar la misma, como una vía eficaz para la enseñanza de la Matemática; de ahí el interés, cada vez más creciente, de didactas e investigadores en el estudio y desarrollo de la resolución de problemas, en sus tres funciones fundamentales, como objeto, método y destreza básica.

Los problemas ponen en juego:

- procedimientos de rutina tales como contar, calcular, graficar, transformar, medir, etc.,
- procedimientos más complejos (conocidos con el nombre de "estrategias" como estimar, organizar, comparar, contrastar, relacionar, clasificar, analizar, interpretar, trabajar con propiedades, descubrir patrones, transformar problemas complejos en otros más simples, etc.

Según Douady (2009), un problema matemático puede formularse en varios marcos en los que es posible establecer correspondencias (por ejemplo: marco físico, marco geométrico, marco gráfico).

Problemas en Geometría

Hasta aquí hemos hecho referencia a los problemas matemáticos desde un punto de vista general. Puntualicemos, de aquí en adelante, en los denominados problemas geométricos. Sin ninguna duda los problemas geométricos son problemas matemáticos, por lo cual valen las consideraciones que venimos de formular, pero tienen algunas características especiales.

En cuanto a las habilidades que una persona requiere para resolver con éxito un problema geométrico son variadas y dependen del tipo de problema a resolver. Involucran procesos de reflexión, de ensayo y error, de conjetura, de búsqueda de patrones, de razonamiento (inductivo y deductivo), entre otras.

Hay distintos tipos de problemas geométricos como mostramos en lo que sigue con tres modelos.

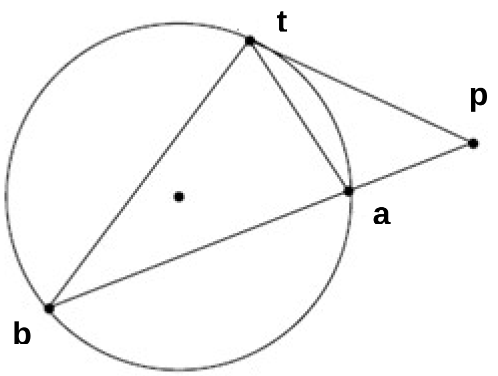
❶ Un triángulo equilátero y un hexágono regular tienen perímetros iguales. Si el hexágono tiene un área de 6 m^2, ¿qué área tiene el triángulo?

❷ Con regla y falsa escuadra, trazar una paralela a una recta dada, por un punto dado (exterior o no) a dicha recta.

❸ En la figura, p es un punto exterior a la circunferencia, con la recta pt tangente a la circunferencia en t.

Demostrar que se cumple la siguiente proporción entre distancias:

$$\frac{d(p,a)}{d(p,t)} = \frac{d(p,t)}{d(p,b)}.$$



Los tres son problemas geométricos, pero hay una diferencia fundamental entre ellos:

- el primero está referido al cálculo de perímetro y área (entendida como la medida de la extensión superficial) de figuras geométricas dadas.
- el segundo es un problema de construcción.
- el tercero es un problema para demostrar.

Como vemos hay una categoría de problemas a los cuales se los caracteriza como de construcción. En este artículo nos vamos a referir a esos problemas.

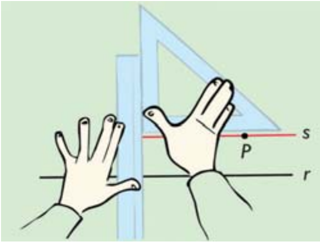
Un problema de construcción no es un problema de dibujo. Podemos dibujar figuras geométricas, utilizando muchos y variados instrumentos. El dibujante utiliza para hacer dibujos, la regla en T, la regla con bordes paralelos, la regla graduada y otros varios instrumentos creados especialmente para ese fin.

En las construcciones geométricas, sólo se pueden utilizar los instrumentos geométricos tal como están definidos, o sea teniendo en cuenta su función específica.

Por ejemplo, la regla geométrica tiene como única función el trazado de rectas. Por tanto, medir con una regla, (poniendo marcas) constituye una violación del juego. Eso hacemos cuando transportamos una "distancia" con la regla (marcando dos puntos).

¿Sabía que podemos hacer lo mismo con el compás, ya que el compás moderno, mantiene una abertura constante cuando se lo levanta del papel? Eso no ocurre con el compás euclidiano, que se cierra inmediatamente cuando la punta fija no está apoyada en el papel.

Para trazar una recta perpendicular a otra recta dada los instrumentos legítimos son la regla y la escuadra.



Hay que tener cuidado en no confundir los problemas geométricos de construcción con los problemas de dibujo técnico. Para éstos se utilizan los instrumentos de dibujo que no los mismos que los instrumentos geométricos.

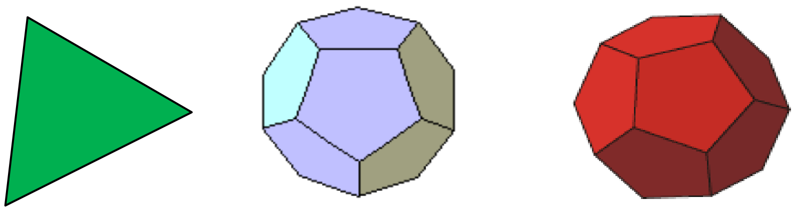
Los objetos geométricos

Los problemas geométricos de construcción tratan sobre los objetos geométricos que se abordan en las distintas geometrías. Por ejemplo, en la geometría métrica tridimensional algunos objetos son las líneas, los polígonos, los poliedros, conos, cilindros, esferas, las superficies planas o no, como las superficies poliédricas, esféricas, etc. Al tratar un problema de construcción se hace necesario su representación en el plano.

Por esa razón hemos creído conveniente hacer un alto para referirnos a los objetos geométricos y sus representaciones.

Sabido es que los objetos geométricos en cualquier espacio geométrico, son entes ideales considerados, en la geometría elemental, que es caso de geometría puntual, como conjuntos de puntos.

Si los representamos en un papel (representaciones planas) obtenemos un dibujo geométrico que no es ya el objeto, sino su representación. A veces también se les dice figura geométrica.



La figura a izquierda representa un triángulo plano. No es un triángulo. La representada al centro corresponde a un dodecaedro regular. Se trata de una representación bidimensional de un objeto geométrico tridimensional, ya que se trata de un sólido platónico. A derecha hay una representación de la superficie de un dodecaedro (sólido).

Lo importante es no identificar el objeto geométrico con su representación. La representación es una manera de comunicación, un lenguaje para expresar y construir los conocimientos. No es un dibujo técnico.

Pasos para resolver un problema de construcción

Desde el momento en que una construcción geométrica es un problema geométrico es muy difícil establecer qué pasos debemos seguir para resolverlo.

Pero hay ciertas reglas que se pueden sugerir para tener en cuenta en el momento de tener que enfrentarlos:

- Emplear suficiente tiempo para el análisis de las condiciones del problema y sus requisitos.

- Dibujar una representación de la construcción completa. Ello ayudará a imaginar el resultado requerido y a descubrir ciertas relaciones que se pueden aplicar al resolverlo.

- Mediante el análisis del esquema de la construcción es posible estudiar las condiciones dadas, es decir, las relaciones que existen concernientes a la construcción completa, mediante su planteamiento original.

- Continuar el análisis hasta encontrar una posible u obvia solución.

- Completar la construcción, con el propósito de asegurar que se satisfacen todos los requisitos del problema planteado.

- Revisar las distintas etapas de construcción en la búsqueda de la solución.

- Anotar las relaciones significativas que condujeron a la solución.

Cómo abordar en el aula los problemas de construcción

Es conveniente trabajar los problemas, tanto en forma individual como grupal.

Por un lado se recomienda la forma individual porque la elaboración de estrategias personales de resolución crea en el resolutor confianza en sus posibilidades de "hacer matemática" ya que se asienta sobre los saberes que puede controlar.

Pero también es enriquecedor un trabajo en forma grupal, porque trabajar en grupo discutiendo estrategias, formulando conjeturas, estimando resultados, acotando errores, examinando alternativas y consecuencias, discriminando los procedimientos más útiles y económicos, hace que se pongan en juego las “reglas sociales del debate y de la toma de decisiones”.

Finalizamos esta sección del artículo recordando que:

Un problema de construcción es un problema matemático

Por tanto, tiene validez la sugerencia que hace George Pólya, en su libro *How to Solve It, A new aspect of Mathematical Method*, en relación con los pasos para resolver un problema matemático:

(1) Entender el problema.

(2) Configurar un plan.

(3) Ejecutar el plan.

(4) Mirar hacia atrás.

PARTE II

LOS INSTRUMENTOS GEOMÉTRICOS

Como se dijo en la PARTE I, los instrumentos geométricos son los requeridos para los problemas geométricos de construcción. Dan pautas sobre la sistematización de la geometría elemental.

Los problemas de construcción no son problemas de dibujo para los cuales los dibujantes requieren de instrumentos adecuados. Las reglas del juego para usarlos son bien distintas de las de aquellos.

A continuación se muestra una representación de una Teselación de Penrose o suelo de baldosas de Penrose.[2] Se trata de un problema de construcción en la geometría isométrica plana.

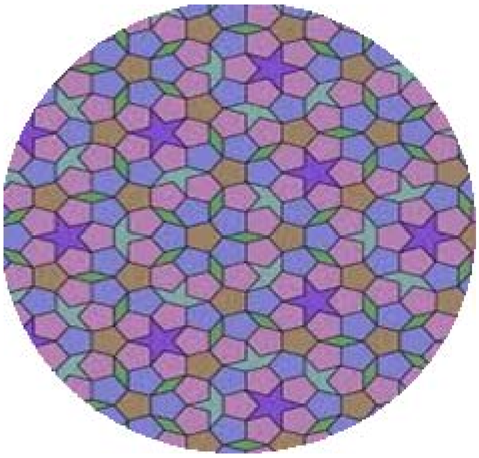
Es una teselación no periódica generada por un conjunto aperiódico de baldosas prototipo nombradas después por Roger Penrose, quien investigó esos conjuntos en la década de los años 70.

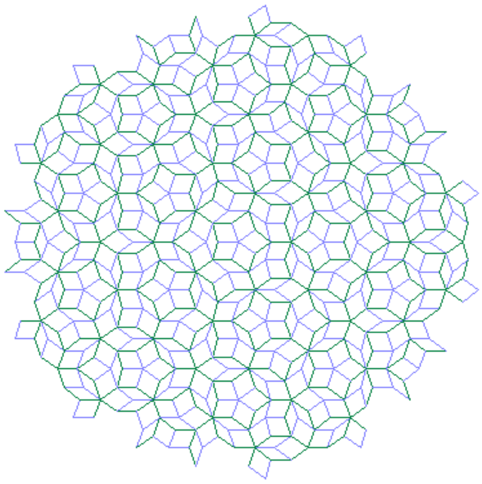
Debido a que todas las teselaciones obtenidas con las baldosas de Penrose no son periódicas, las teselaciones de Penrose han sido consideradas como teselaciones aperiódicas.

[2] Extraído de *wikipedia*

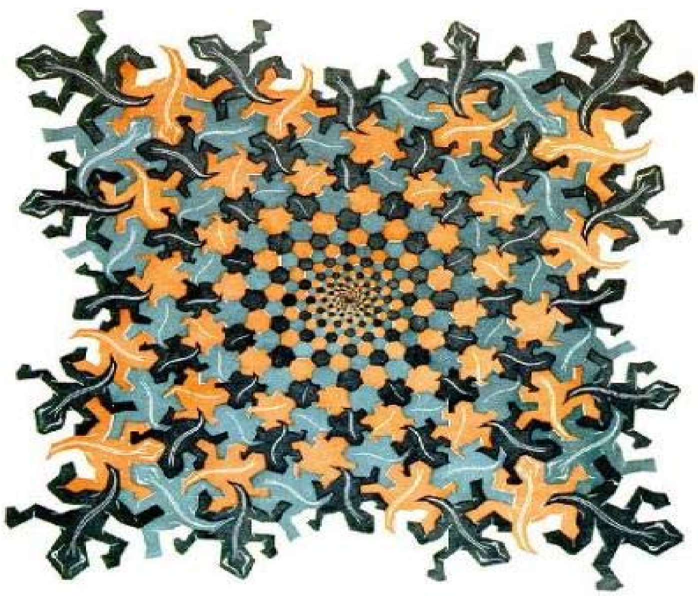
Entre el infinito número de posibles teselaciones hay dos que poseen eje de simetría y una simetría rotacional de orden cinco, como en el diagrama mostrado a la derecha, y el término de Teselación de Penrose usualmente se refiere a esos.

Un teselación de Penrose tiene varias propiedades geométricas remarcables, la mayoría son notables





Hay que distinguir los teselados geométricos de los teselados artísticos como los realizados por Escher.



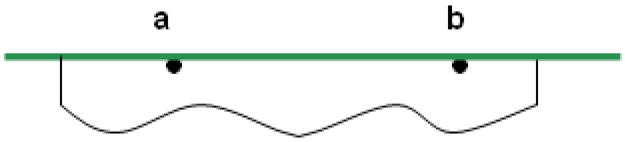
1.1. La regla geométrica.

Dibujamos rectas mediante el uso de una *regla geométrica*. La regla es un instrumento geométrico básico, cuya *única* función es el trazado de rectas.

No podemos usarla para realizar una operación diferente de la señalada. Con lo dicho es suficiente. Podemos definirla, no como un objeto material, sino como un instrumento geométrico, o sea en forma funcional, lo cual significa lo qué se puede hacer o construir con ella.

Definición

Se llama regla al instrumento geométrico con el cual se puede realizar esta única operación: trazar la recta determinada por dos puntos.



Para materializar una regla se puede recurrir a cualquier *objeto plano* con un borde rectilíneo, en el cual no haya puntos marcados. Por lo dicho, una regla geométrica no tiene marcas; tampoco tiene dos bordes rectilíneos paralelos.

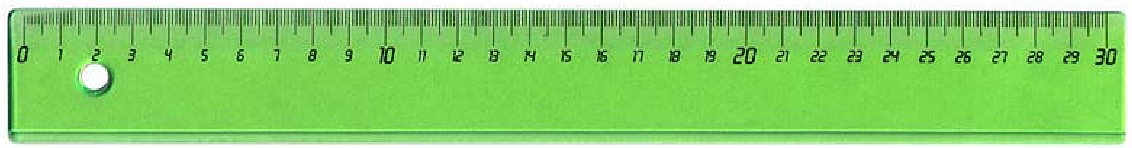
La regla geométrica es el instrumento propio de la Geometría Proyectiva. En ésta opera el grupo de las transformaciones proyectivas (P , o), cuyos elementos dejan invariantes las propiedades proyectivas, entre las cuales la alineación de puntos es una propiedad básica. Entre ellas mencionamos las proyectividades.

Las construcciones de la Geometría Proyectiva son las que se pueden realizar con la regla.

A continuación recordamos algunos instrumentos que son diferentes de la regla geométrica: *regla con puntos marcados, regla graduada, regla con dos bordes paralelos (riga a dui canti).*

Se estará preguntando por qué esta última no es la regla geométrica. Ocurre que con ella es posible dibujar la circunferencia envolvente, de centro cualquiera y radio igual a la distancia entre los centros. Interviene el concepto de distancia.

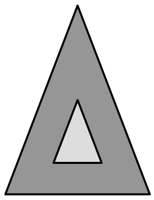
En cuanto a la regla graduada es un instrumento de medición con forma de plancha delgada y rectangular que incluye una escala graduada dividida en unidades de longitud, por ejemplo centímetros o pulgadas.



En síntesis, una cosa es que con un instrumento se puedan dibujar rectas, y otra cosa es el instrumento al cual la Geometría define como *regla*.

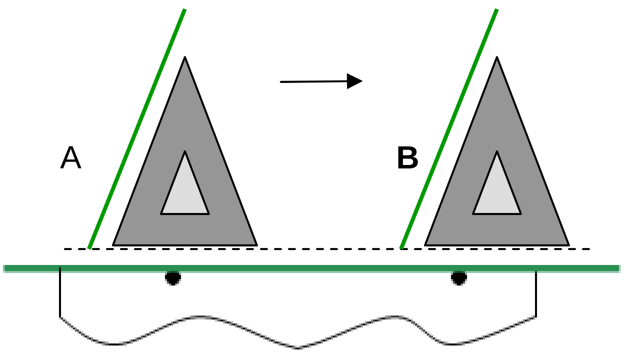
1.2 La falsa escuadra

Para trazar rectas utilizamos la regla. Para trazar una recta paralela a otra debemos agregar a la regla, otro instrumento geométrico: la falsa escuadra o triángulo.



En efecto, para tal construcción la regla geométrica no es suficiente, por cuanto el paralelismo entre rectas es un concepto más elaborado que la alineación de puntos.

La figura que sigue es elocuente.



Definición

Se llama falsa escuadra al instrumento geométrico con el cual, junto con una regla, se puede realizar esta única operación: trazar una recta paralela a una recta dada.

La falsa escuadra es el instrumento geométrico adecuado para resolver los problemas de construcción de la Geometría Afín como por ejemplo, encontrar el punto medio de una cupla de puntos o de un segmento, la mediana de un segmento o construir el centro de gravedad de un triángulo.

En algunos textos se consigna el problema de encontrar el punto medio de un segmento usando un compás. En este caso estamos ante un problema de dibujo técnico pero no, de geometría. El punto medio de un segmento es un concepto afín. Se resuelve con regla y falsa escuadra.

La falsa escuadra está relacionada con el grupo de transformaciones puntuales que preservan el paralelismo es decir, que transforman rectas paralelas en rectas paralelas. Hacemos referencia al grupo (A , o), de las transformaciones afines del plano de la geometría elemental con respecto a la composición de funciones. Se trata del grupo del plano afín. Entre ellas mencionamos las traslaciones puntuales de vector dado y la simetría central.

El grupo afín del plano está incluido en el grupo proyectivo del plano, o lo que es equivalente:

$$(\mathbf{P}\ ,\ \mathbf{o}) \supset (\mathbf{A}\ ,\ \mathbf{o})$$

Para materializar una falsa escuadra se puede recurrir a cualquier *objeto plano* con forma triangular que no tenga ángulo recto, y en el cual no haya puntos marcados.

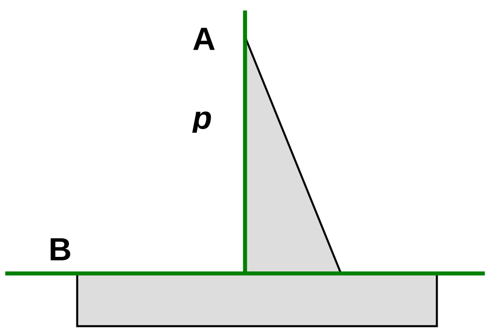
En síntesis, una falsa escuadra geométrica no tiene forma de triángulo rectángulo ni tiene graduación.

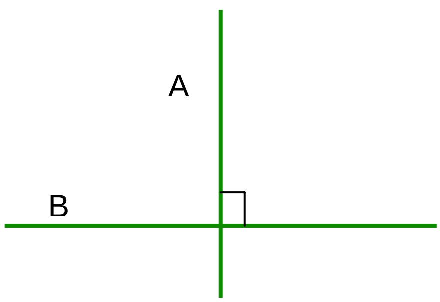
1.3 La escuadra geométrica

Venimos de decir que con una regla y una falsa escuadra se pueden resolver los problemas geométricos de la Geometría Afín. Son los relacionados básicamente con el paralelismo de rectas.

Aparece un nuevo problema de construcción: trazar una perpendicular a una recta dada. Se hace necesario considerar un nuevo instrumento geométrico: la escuadra geométrica. Es parecido a la falsa escuadra, pero difiere de aquella en que uno de sus ángulos es recto.

La figura a izquierda ilustra cómo se puede trazar una perpendicular a una recta dada. A la derecha se señala la conveniencia de hacer una marca en el caso la representación de dos rectas son perpendiculares.





Proponemos en lo que sigue una definición matemática de escuadra. Lo mismo que en los casos anteriores no se trata de una definición como objeto material.

Definición

Se llama escuadra al instrumento geométrico con el cual, junto con una regla, se puede realizar esta única operación: trazar una recta perpendicular a una recta dada.

La escuadra es el instrumento geométrico adecuado para resolver los problemas de construcción de la Geometría Métrica como por ejemplo, construir la mediatriz de un segmento.

Está relacionada con el grupo de transformaciones puntuales que preservan la perpendicularidad es decir, que transforman rectas perpendiculares en rectas perpendiculares. También preservan las distancias relativas.

Estamos aludiendo al grupo (M , o) de las transformaciones métricas del plano de la geometría elemental, con respecto a la composición de funciones. Se trata del grupo métrico del plano euclidiano. Por ejemplo, las homotecias puntuales son elementos del mencionado grupo.

El grupo métrico del plano está incluido en el grupo afín del plano, por lo cual se da esta situación:

$$(P , o) \supset (A , o) \supset (M , o)$$

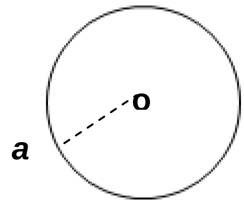
Para materializar una escuadra geométrica se puede recurrir a cualquier *objeto plano* con forma de triángulo rectángulo y en el cual no haya puntos marcados.

Hay escuadras para usar en dibujo técnico. Pueden ser de diferentes tamaños y colores o tener biseles en los cantos que permitan ser usadas con rotring. Llevan escala gráfica para ser usadas como instrumento de medición.

Compás geométrico

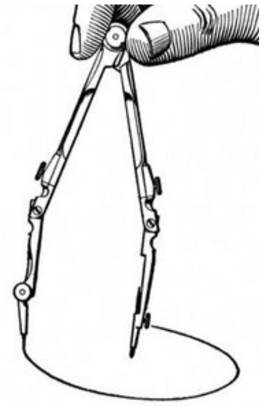
Aparece un nuevo problema de construcción: trazar una curva cerrada simple llamada circunferencia.

Una circunferencia es un conjunto de puntos del plano equidistantes de otro fijo, denominado centro. Esta distancia es el número real positivo, denominado radio. El doble del mismo es el diámetro. En la circunferencia representada es d(o, a) = r.



Otra cosa es el segmento de recta que tiene como longitud el radio (respecto de cierta unidad), conocido como segmento radial; lo mismo ocurre con el segmento diametral.

No se debe confundir el radio con el segmento radial o el diámetro con el segmento diametral. La fórmula conocida para calcular la longitud de una circunferencia, $2 \Pi r$, utiliza el número r (radio)



Para dibujar una circunferencia se utiliza otro instrumento geométrico: el compás. Se clava una punta, llamada seca, en un punto de un plano, mientras que la otra punta, llamada punta de trazado, se desliza sobre el plano describiendo la curva.

La distancia entre ambas puntas del compás se mantiene constante al dibujarla.

Lo dicho permite proponer una definición del compás euclidiana, teniendo en cuenta su función.

Definición

Se llama compás al instrumento geométrico con el cual se puede realizar esta única operación: trazar una circunferencia dado un punto llamado centro y un número real positivo denominado radio.

El compás es el instrumento geométrico adecuado para resolver los problemas de construcción de la Geometría Isométrica. Aparece después de la escuadra.

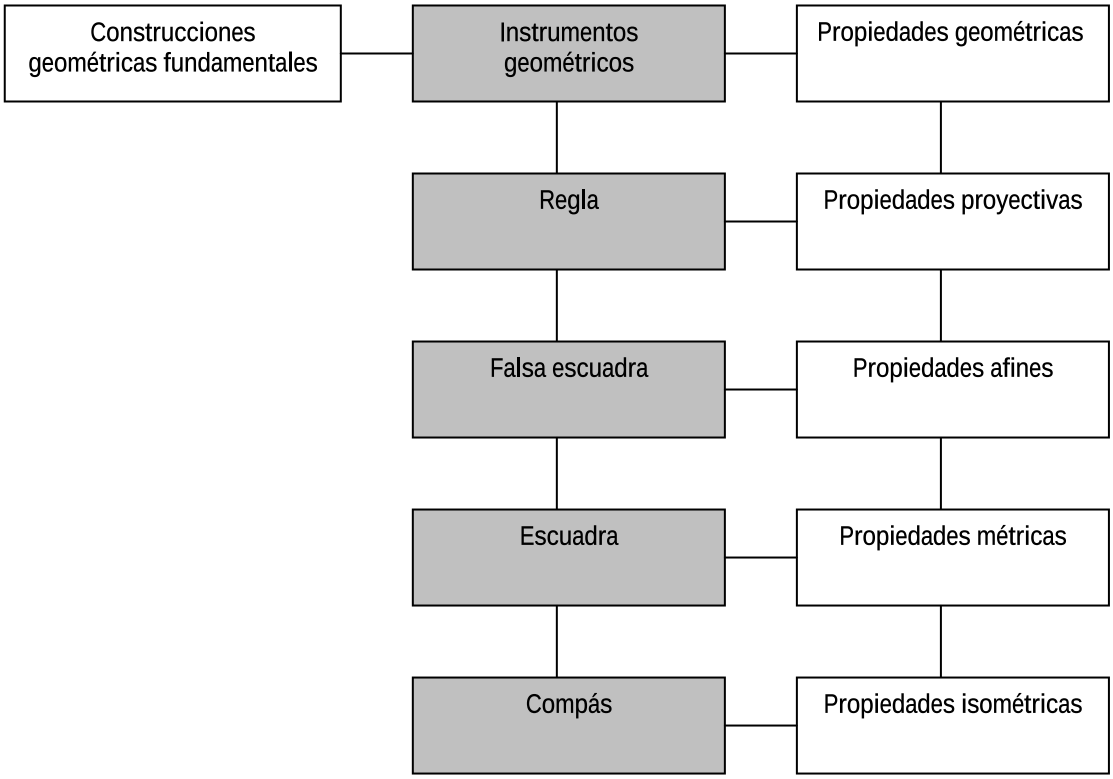
Está relacionado con el grupo de transformaciones puntuales que preservan las distancias absolutas. Estamos aludiendo al grupo isométrico del plano: ($\mathcal{I}$, o), de las transformaciones isométricas del plano de la geometría elemental. Por ejemplo, las traslaciones puntuales de vector dado y las rotaciones de ángulo dado, son elementos del mencionado grupo.

El grupo isométrico del plano está incluido en el grupo métrico del plano, por lo cual se da esta cadena de inclusiones:

$$(\mathbf{P}, o) \supset (\mathbf{A}, o) \supset (\mathbf{M}, o) \supset (\mathcal{I}, o)$$

En cuanto al compás moderno que no es el euclidiano, conserva la abertura cuando se lo levanta del papel. Por esa razón se confunde su función. Pero una cosa es su función legítima y otra, es el uso para realizar verificaciones experimentales.

En síntesis. El diagrama que sigue es elocuente.



PARTE III

Dos problemas de construcción

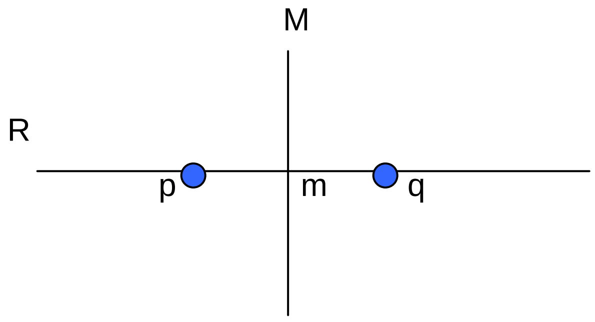
A continuación presentamos dos problemas de construcción. Significa que la construcción se puede justificar. Sabido es que en muchas ocasiones realizamos construcciones geométricas sin justificarlas matemáticamente, pero siempre es bueno tener presente las propiedades usadas para validarlas.

Son problemas del ámbito de la geometría isométrica.

➊ La mediatriz de un segmento.

- *Dados dos puntos cualesquiera de una recta R, trazar una recta perpendicular que pase por el centro del segmento determinado por esos puntos.*

La siguiente figura ilustra la representación de una recta M perpendicular al segmento pq por su punto medio m

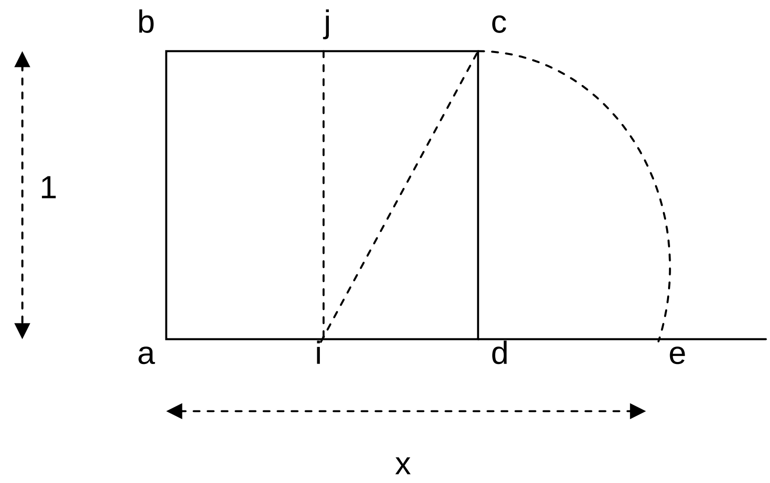


¿Qué instrumentos geométricos han permitido resolver este problema? Si usted pensó en la regla y la escuadra su respuesta es correcta. Pero, si pensó en la regla y el compás, entonces le sugerimos que relea las funciones de cada instrumento.

❷ El número de oro

- *Recordemos el número de oro, que aparece en muchos dominios, en particular en arquitectura y en pintura. En esta situación proponemos construir un punto representativo de ese famoso número real.*

Para comenzar le decimos que debe partir de un cuadrado abcd, tal que su lado mida 1.



Construya los puntos i, j, que son respectivamente, los centros de los lados ad y bc, del cuadrado de partida. Observe qué ocurre con la circunferencia que tiene centro en el punto i y cuyo radio es igual a la longitud del segmento ic.

Calcule la distancia ae, anotada x. ¿Su respuesta es x = $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$?

Si su respuesta es sí, hizo bien el cálculo.

Escríbalo en forma posicional con una aproximación de orden 8. Para que justifique la construcción le decimos que ese número es solución de la ecuación $u^2 - u - 1 = 0$. ¿Es el número de oro?

Analice si los instrumentos geométricos usados son los correctos.

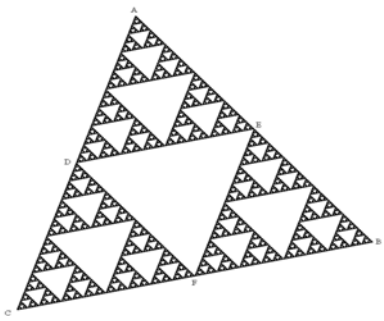
PARTE IV

Programas de construcción y reglas de perspectiva.

Programas de construcción

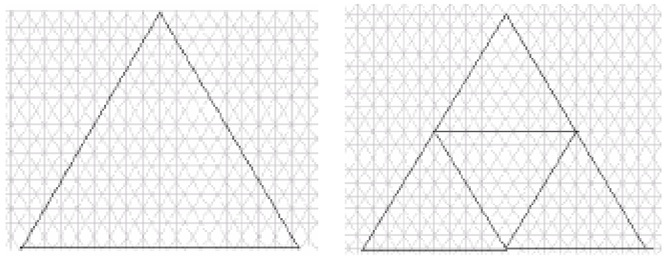
¿Conoce qué son los programas de construcción?, ¿Para que nos sirven? Pueden sernos útiles por ejemplo, para representar objetos geométricos, para verificar propiedades y para resolver problemas geométricos.

Presentamos un programa de construcción para el fractal geométrico: Triángulo de Sierpinski.



El siguiente proceso de construcción, cuando se repite una y otra vez, genera una representación de dicho objeto geométrico.

- Partiendo de un triángulo equilátero, una los puntos medios de los lados, obteniendo 4 sub - triángulos.
- Deseche el triángulo central (inferior), guardando solamente los tres sub-triángulos de las esquinas.



- Repita en cada sub-triángulo el proceso y deseche nuevamente el triángulo central inferior. ¿Cuántos triángulos remanentes quedan?

- Repita nuevamente el algoritmo dos veces más. ¿Cuántos triángulos remanentes obtuvo en cada etapa?
- Recuerde que para realizar esta actividad debe disponer de hojas rayadas diseñadas para tal fin.

a. ¿Qué ocurriría si se repite el proceso una y otra vez? ¿Cómo cambia la figura?
Si el proceso continuara indefinidamente obtendríamos el triángulo de Sierpinski.

b. Explique qué pasaría si en lugar de conservar los tres triángulos de las esquinas, se aplica el algoritmo para el triángulo central inferior hasta la etapa 5.

c. Repita el algoritmo desde la etapa 1 a la 3 para un triángulo rectángulo e isósceles e informe lo qué observa.

Nota:
El trabajo con fractales, mediante este programa de construcción, en el cual se deben usar los instrumentos geométricos adecuados, permite un acercamiento a la construcción de infinito ya que la aproximación geométrica puede dar lugar a situaciones en las que pueden estar presentes las características que definen y dan marco a la noción de infinito como un estado.

Reglas de perspectiva

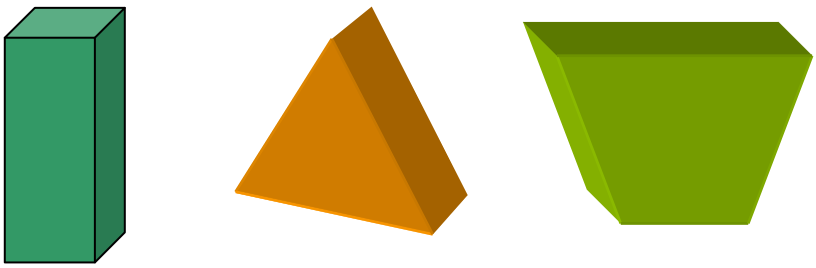
En ciertas ocasiones se necesitan conocer algunas reglas de perspectiva. Lo mejor es que consideremos ejemplos.

Hacemos dibujos en perspectiva para representar cuerpos geométricos en una hoja de papel o en el pizarrón. Recuerde que los objetos geométricos son ideales y que las distintas formas de representarlos nos ayudan para estudiarlos.

A continuación presentamos algunas reglas de perspectiva:

- Sobre un dibujo en perspectiva las rectas paralelas están representadas por rectas paralelas y los segmentos de rectas paralelas están representados por segmentos de rectas paralelas.
- Los rectángulos, a veces, están representados por paralelogramos.
- Las circunferencias a veces, están representadas por elipses.

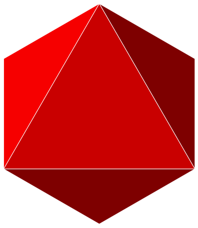
Ejemplos

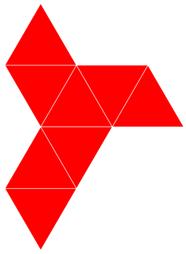


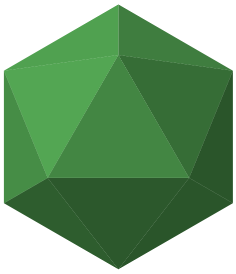
En lo que sigue presentamos patrones de algunos de ellos, entendiendo que se trata de representaciones planas de las superficies planas de las superficies poliédricas de ellos.

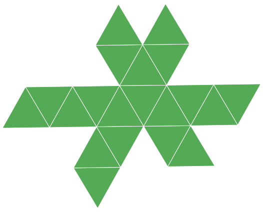
Se ve la vinculación entre un patrón de un poliedro y su representación en perspectiva.

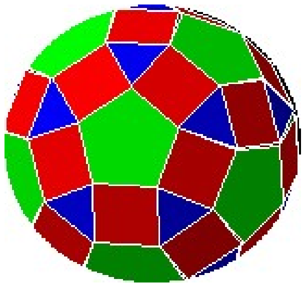
Debemos tener en cuenta que tanto el patrón como su dibujo en perspectiva, suministran abundante información acerca de la superficie poliédrica de que se trate: número de caras, de vértices, de aristas, forma de las caras, paralelismo entre caras, entre aristas, entre aristas y caras, perpendicularidad entre aristas, entre aristas y caras, entre caras, en fin, sólo hay que saber leer tales recursos.

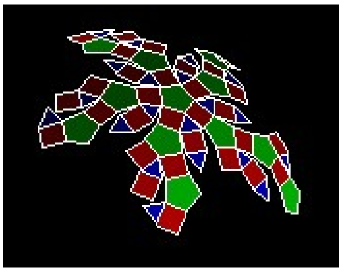












PARTE FINAL

He quedado sorprendido con lo tratado en este artículo. Destaco:

- El descubrimiento de Klein es fundamental, ya que permite clasificar las geometrías, mostrando la vinculación de cada una de ellas con un grupo de transformaciones.

- El conocimiento de los instrumentos geométricos y su definición dada por su función específica es algo sorprendente.

- La relación de los instrumentos geométricos con las distintas geometrías del Programa de Klein es un hecho geométrico muy importante.

- La distinción entre los problemas geométricos de construcción de los programas de dibujo es para tener en cuenta.

- Una teoría elemental de las construcciones geométricas es muy orientadora en la enseñanza de la Geometría.

- Compartimos en que tal teoría hace inevitable una definición matemática precisa y funcional de cada instrumento geométrico, y arroja luz acerca de la sistematización de la geometría elemental, poniendo más claramente de relieve los cauces de ordenación natural. (Trejo; 1968)

Referencias bibliográficas

- **A**lderete, M. J. (1996). *Espacios afines*. Mendoza: Facultad de Ciencias Físicas, Químicas y Matemáticas. Universidad Juan Agustín Maza.
- **A**lderete, M. J. (1996). *Espacios métricos euclidianos*. Mendoza: Facultad de Ciencias Físicas, Químicas y Matemáticas. Universidad Juan Agustín Maza.
- **A**lderete, M. J. (1999). *Geometría*. Mendoza: D.G.E. Gobierno de Mendoza.
- **A**lderete, M. J.**,** (1988), *Geometría y el Programa de Erlangen*. *Notas del Curso III.* XI Reunión Anual de Educación Matemática_ Unión Matemática Argentina_ Universidad Nacional de San Luis.
- **A**lderete, M. J., (2009). Geometrías Kleinianas. Mendoza: EFE. Universidad Nacional de Cuyo.
- **A**lbert Huerta, J.. , Cázares Serrano, M., Castañeda Alonso, A. (1999) Construcción del infinito a través de fractales en estudiantes de secundaria. **-** En: Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. V12, (1) 1-6. México: Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C. V.
- **G**entile, E., (1991). *Construcciones con regla y compás*. Buenos Aires: Revista Educación Matemática. Unión Matemática Argentina. (UMA)
- **G**ourion, M. L. y Lixi, C. (1978). *Géométrie*. París: Fernand Nathan.
- **V**illamayor, O., (1997) *Geometría elemental a nivel universitario*. Buenos Aires.
- **P**aenza, A. (2005). *Matemática ... Estás ahí? Sobre números, personajes, problemas y curiosidades***.** Buenos Aires**:** Siglo XXI Editores Argentina S.A.
- **S**antaló, L. (1993). *La Geometría en la formación de Profesores*. Buenos Aires: Red Olímpic.
- **T**rejo, C. A. (1968). *Matemática Elemental Moderna: Estructura y Método*. Buenos Aires: EUDEBA.