

Aportes para la enseñanza de la Matemática de Mendoza

Amigos docentes:

En este número el tema central son los NAP, la mayoría de ustedes ya han tenido un primer acercamiento con ellos, pero para los que no se sepan de que se trata, son los Núcleos de Aprendizaje Prioritario, los cuáles han sido acordados para Nivel Inicial, Primer Ciclo y Segundo Ciclo de la EGB. Ellos promueven la integración de nuestro Sistema Educativo Nacional, que como todos sabemos es altamente heterogéneo y fragmentario, pero como quedó expresado en el Documento aprobado por Resolución Nº 225/04 del C.F.C. y E., la organización de los Núcleos "no debe interpretarse como un diseño que sustituye o niega las definiciones jurisdiccionales". Se aspira a que los aprendizajes prioritarios contribuyan a "asegurar una base de unidad del Sistema Educativo Nacional ... (y) a garantizar que todos los habitantes alcancen competencias, capacidades y saberes equivalentes con independencia de su ubicación social y territorial" (Res. Nº 214/04. consejo Federal de Cultura y Educación). Por estas razones los aprendizajes prioritarios deberán actuar como referentes y estructurantes de la tarea docente, de tal forma que se recupere la centralidad del enseñar para promover aprendizajes con sentido.

En esta sexta edición electrónica encontraremos:

1. **NAP, ¿una lista más de contenidos?**
2. **Situación Didáctica para el desarrollo de un NAP de primer o segundo ciclo**
3. **Curiosidades matemáticas**
4. **Bibliografía**



NAP, ¿una lista más de contenidos?

Si nuestros alumnos aprenden con sentido las operaciones, ¿por qué tenemos el mismo sentimiento que la seño que muestra la caricatura cuando nuestros alumnos nos dicen que dos más dos es cinco? ¿o cuando nos dicen que la potenciación es distributiva con respecto a la suma?



SALA DE MAESTROS





La función central de la escuela es enseñar para que los niños y jóvenes adquieran los saberes que les permiten el ejercicio de una ciudadanía responsable y una inserción en el mundo.

Un **Núcleo de Aprendizaje Prioritario** en la escuela refiere a un conjunto de saberes centrales, relevantes y significativos, que incorporados como objetos de enseñanza, contribuyan a desarrollar, construir y ampliar las posibilidades cognitivas, expresivas y sociales que los niños ponen en juego y recrean cotidianamente en su encuentro con la cultura, enriqueciendo de ese modo la experiencia personal y social en sentido amplio.

Estos NAP son organizadores de la enseñanza orientada a promover múltiples y ricos procesos de construcción de conocimientos, potenciando las posibilidades de la infancia pero atendiendo a la vez ritmos y estilos de aprendizaje singulares a través de la creación de múltiples ambientes y condiciones para que ello ocurra. Se trata de pensar **qué debe enseñarse, qué se aspira aprendan** los alumnos y **de qué manera** se crearán las condiciones pedagógicas y materiales para que todos los niños y jóvenes accedan a experiencias educativas cuya riqueza aporte a revertir desigualdades.

Ello no implica ni puede interpretarse como desconocimiento de los diseños curriculares jurisdiccionales, por el contrario no es un diseño que niega o sustituye las definiciones jurisdiccionales, sino que son una **base común** para la enseñanza, por lo cual la enseñanza no debe reducirse sólo a ellos, se debe pensar como en un punto de partida para la enseñanza y no como un techo al cual hay que llegar.

En Matemática la mayoría de los NAP, comienzan con las siguientes frases:

- Identificar regularidades
- Operar con significado
- Explorar relaciones
- Elaborar preguntas
- Interpretar información.....
- Construir modelos
- Explorar afirmaciones
- Argumentar
- Validar
- Comunicar

Como se observa, más que una lista de contenidos, es una descripción de tareas para desarrollar competencias ineludibles en matemática.

Aquellos docentes, directivos, estudiantes de Institutos de Formación Docente, que no han podido tener en sus manos los NAP, les recomiendo visitar el portal educativo de la provincia de Mendoza www.mendoza.edu.ar o la página www.educ.ar, allí encontrarán los NAP para nivel inicial y primer ciclo.



Próximamente estarán disponibles los de segundo ciclo, y el año que viene los del tercer ciclo (en este momento los de tercer ciclo están pasando por la etapa de consenso en todo el territorio nacional)

A continuación presentamos el análisis de un Núcleo de Aprendizaje Prioritario; analizamos los DCP, con sus sugerencias a través de los distintos documentos elaborados a partir del año 1992, es decir libros 5,7,11,24,33 (libros naranja), las competencias en matemática y los documentos de apoyo a las jornadas institucionales, etc. , observando los alcances que tienen en relación a los Núcleos de Aprendizaje Prioritarios. Para ello seleccionamos un NAP, tratando de mostrar: ejes que abarca, contenidos que desarrolla (conceptuales y procedimentales), competencias a desarrollar para el logro de los mismos, etc.



NAP 2º ciclo – 4º	DCP			Competencias en matemática
	Ejes que abarca el NAP	Contenidos que desarrolla el NAP		Competencias a desarrollar para el logro del NAP
		Conceptuales	Procedimentales	
El reconocimiento y uso de la operaciones entre números naturales y la explicitación de sus propiedades en situaciones problemáticas que requieran: sumar y/o restar con distintos significados partiendo de diferentes informaciones, utilizando distintos procedimientos y evaluando la razonabilidad del resultado obtenido	Actividades numéricas	Operaciones y cálculos en N Adición Restas Problemas Cálculo Reflexivo	Operaciones y cálculos en N Interpretación de situaciones aditivas Interpretación y uso de la técnica usual de la suma, con apoyo del sistema de numeración Interpretación y uso de tablas y cuadros de suma Reconocimiento y uso de propiedades Interpretación de situaciones sustractivas Interpretación y uso de la técnica usual de la resta, con apoyo del sistema de numeración Problemas Reconocimiento, resolución y validación de resultados, de situaciones aditivas y sustractivas con números naturales Cálculo Reflexivo Puesta en acción de diversos procedimientos y algoritmos de cálculo con números naturales, usando las propiedades del sistema de numeración	Opera correctamente Compara y extrae conclusiones Realiza procedimientos recordando criterios de ejecución Reconoce terminología utilizada en el planteo Interpreta los resultados Traduce de un lenguaje a otro Utiliza relaciones enunciadas Relaciona datos con conocimientos previos Reorganiza datos para encontrar el método Mantiene las condiciones para llegar a la solución Reestructura reconociendo condiciones anteriores Opina y argumenta sobre un resultado determinado Elige la opción correcta explicando su elección Explica las decisiones tomadas
	Actividades geométricas	La medida y la medición Longitud y perímetro	La medida y la medición Uso de la noción de perímetro para calcular perímetro de polígonos y figuras simples	

	Actividades Lógicas y de la comunicación	Símbolos y signos Signos Algoritmos	Símbolos y signos Uso de los signos $\in$ y $\notin$ en distintos contextos Uso de los signos $=$ y $\neq$ en distintos contextos Algoritmos Interpretación de algoritmos (repetitivos o no) en distintos contextos Reconocimiento de algoritmos equivalentes en distintos contextos Uso de algoritmos para describir un procedimiento conocido Descripción de algoritmos Elaboración o diseño de algoritmos Relaciones y funciones Interpretación y uso de funciones en distintos contextos La comunicación, los problemas y el razonamiento Identificación del contexto de la situación, antes de toda tentativa de resolución de un problema Búsqueda de las informaciones pertinentes, selección y organización de las mismas para resolver problemas Lectura, interpretación y análisis de la información suministrada y traducción de la misma por distintos medios. Anticipación y estimación del resultado de un problema Búsqueda de herramientas útiles de resolución, de las cuales se dispone Justificación de procedimientos utilizados y resultados obtenidos Formulación de enunciados a partir de un conjunto de datos Comunicación, en distintas formas, del camino propuesto para la resolución de un problema y los resultados obtenidos	
		Relaciones y funciones Funciones La comunicación, los problemas y el razonamiento Tratamiento de la información		
		Comunicación		

Situación Didáctica para el desarrollo de un NAP de primer o segundo ciclo

Diversión con la resta

La actividad puede realizarse en varios niveles de escolaridad, dependiendo de los conceptos matemáticos que se quieren trabajar. En primer ciclo o segundo pretende por ejemplo hacer restas posibles en el conjunto de los números naturales. También se pueden desarrollar nociones en torno a regularidades numéricas y diferencias en valor absoluto.

NAP: El reconocimiento y uso de la sustracción en situaciones problemáticas que requieran:

- usar la sustracción con distintos significados.
- realizar cálculos exactos de restas con números de una, dos y tres cifras eligiendo hacerlo en forma mental o escrita en función de los números involucrados, articulando los procedimientos personales con los algoritmos usuales.
- explorar relaciones numéricas y reglas de cálculo de restas y argumentar sobre su validez.
- registrar y organizar datos en listas y tablas a partir de distintas informaciones.

El desarrollo de la actividad pretende que los alumnos puedan:

- Reconocer patrones y buscar regularidades en un conjunto de datos (hechos, formas geométricas, números, sucesiones...)
- Interpretar algoritmos (repetitivos o no) en contextos aritméticos.
- Usar algoritmos para describir un procedimiento en contextos aritméticos.
- Elaborar algoritmos en contextos aritméticos.
- Buscar, seleccionar y organizar informaciones pertinentes para resolver problemas.
- Leer, interpretar y analizar la información suministrada y traducirla por distintos medios.
- Interpretar el concepto de diferencias en valor absoluto.
- Justificar (en particular por escrito) los procedimientos utilizados.
- Comunicar, en distintas formas, el camino propuesto para la resolución de un problema y los resultados obtenidos.

En este punto sólo se han enumerado las expectativas de logros inherentes a la actividad.

Una aproximación epistemológica:

La idea de los números negativos o positivos data de principios del siglo XVI o finales del XV, aunque ya los chinos (300 A.C.) hacían cálculos utilizando varillas negras para los números positivos y rojas para las cantidades negativas, sin considerar a los números negativos como posibles soluciones de ecuaciones.

La primera vez que aparece sistematizada la aritmética de los números negativos y del cero es en la obra de Brahmagupta (500 D.C.) y aunque los árabes, por ejemplo en el Álgebra de Al-Khowarizmi (830 D.C.) rechazaban todo tipo de magnitudes absolutas negativas, estaban familiarizados con las reglas que rigen las

operaciones con números enteros positivos y negativos (considerando a estos últimos como restas indicadas únicamente).

Chuquet (1500) es el primero en expresar un número negativo aislado en una ecuación algebraica como $4x = -2$, aunque en general no admitía al cero como raíz. Recién Girard en 1629 admite en su obra "Invention nouvelle en l'algèbre" las raíces negativas y las imaginarias en la resolución de ecuaciones.

El concepto de valor absoluto, utilizado hoy, tanto en el cálculo real, para indicar entornos, sistematizar la definición de derivada, el estudio como función, entre otros; como en el álgebra, como una función distancia en el conjunto de los números reales, no se ve claramente como aparece en la historia, sino que aparentemente sólo se fue utilizando.

La intuición de la experiencia diaria indica que existen magnitudes susceptibles de variar en dos sentidos, por ejemplo la posición relativa de dos puntos sobre una recta, en los cuales no basta dar su distancia, sino que es necesario, además, precisar si uno de los puntos está a la izquierda o derecha del otro. Un problema análogo se presenta en la designación de las temperaturas, del balance de una contabilidad, etc..

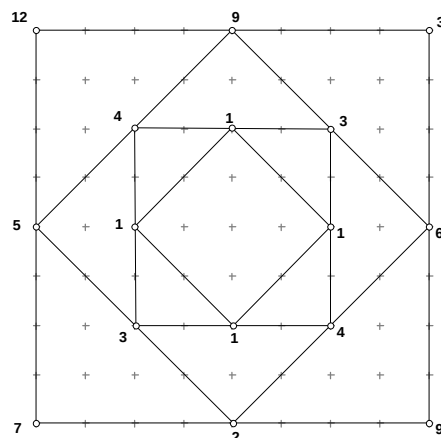
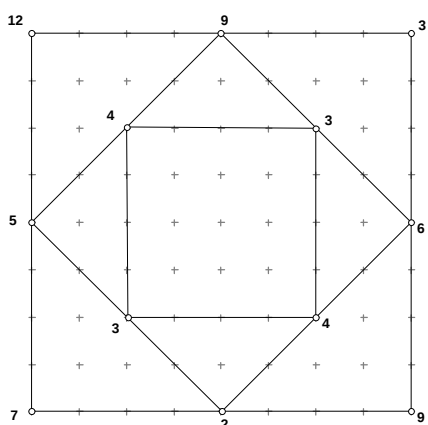
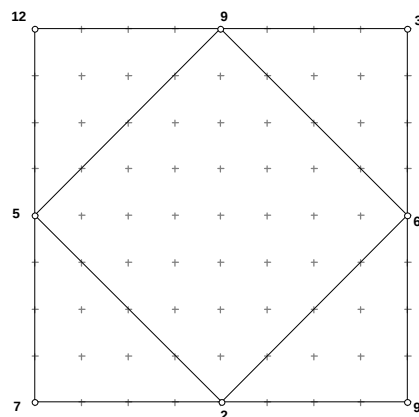
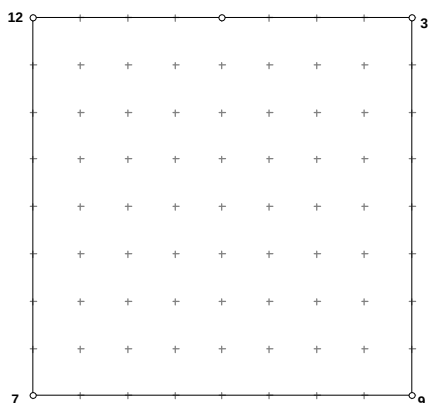


Enunciado de la situación:

Diversión con la resta

Se comienza dibujando un cuadrado. Se escribe un número distinto en cada uno de los vértices (que en la figura superior han sido 12, 7, 9 y 3); seguidamente se traza un cuadrado inscrito en el primero uniendo los puntos medios de los lados de éste.

Se asigna ahora un nuevo número a cada vértice del nuevo cuadrado, hallando la diferencia positiva entre los extremos del lado en que se encuentra (por ejemplo, $12 - 7 = 5$, $9 - 7 = 2$, $9 - 3 = 6$ y $12 - 3 = 9$). El cuadrado recién formado sirve ahora de cuadrado inicial. El proceso continúa hasta lograr que los números de todos los vértices sean iguales.





Realiza el mismo proceso para los cuadrados de vértices (25, 37, 28, 1) y (25, 0, 4, 2)

¿Cuántos pasos fueron necesarios para lograr que en todos los vértices aparecieran los mismos números?

Prueba a construir una serie de cuadrados procediendo en orden inverso, es decir comenzando por el cuadrado central con números idénticos en los vértices.

Volviendo a poner en los



la situación inicial y limitando el valor que se puede vértices a los números 1, 2, 3 y 4.

que en todos

¿Cuántos pasos serán necesarios para lograr los vértices aparezcan los mismos números?

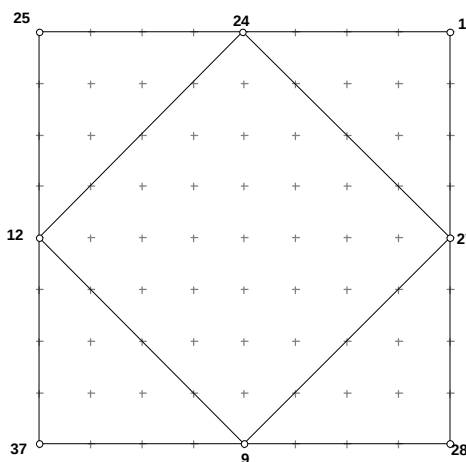
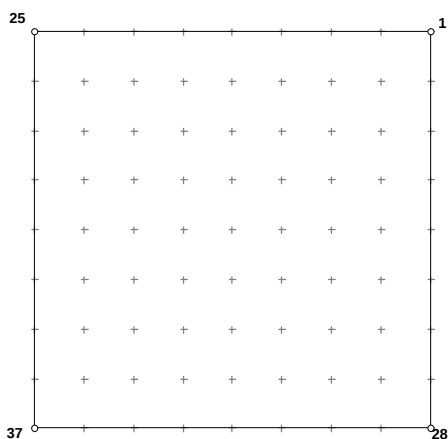
Con los mismos números pero en otro orden, ¿Cuál es la serie más larga de cuadrados que se puede hallar? ¿Cuál la más corta?

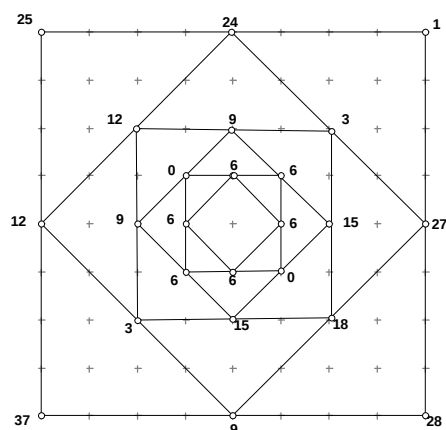
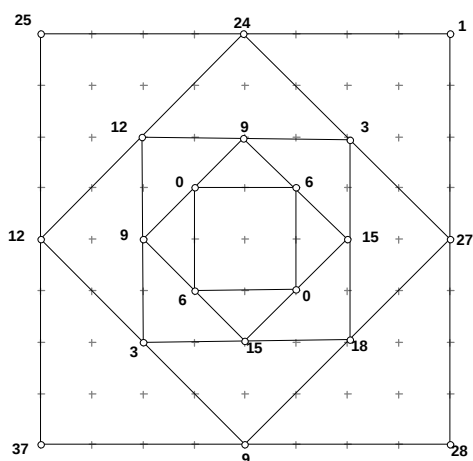
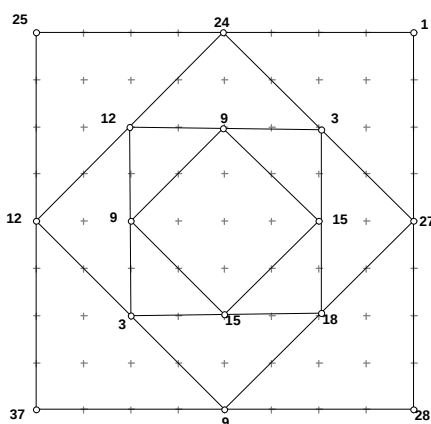
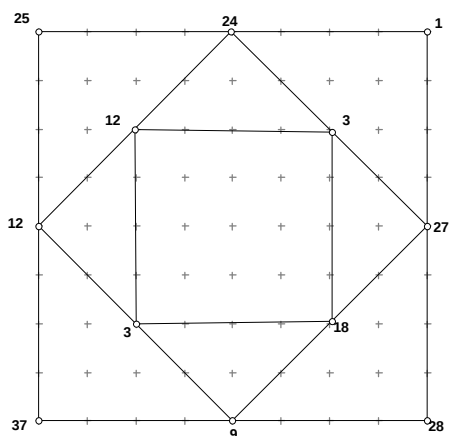
Si ahora realizamos la misma actividad pero con un triángulo en el punto de partida, utilizando los números 1, 2, 3 y 4 (es decir ir tomando de a tres estos cuatro números y con ellos rotular los vértices). ¿En qué se diferencian los resultados?

Análisis a priori, desarrollo de la actividad propuesta:

Realiza el mismo proceso para los cuadrados de vértices (25, 37, 28, 1) y (25, 0, 4, 2)

En este punto los alumnos pueden colocar los números en cualquier orden en los vértices, porque si bien en el ejemplo se dan en un orden y aparecen en el cuadrado en ese orden empezando en el vértice superior izquierdo del cuadrado y siguiendo en sentido contrario a las manecillas del reloj, no se indica expresamente que así se haga. Pueden llegar a presentar esta secuencia de cuadrados:

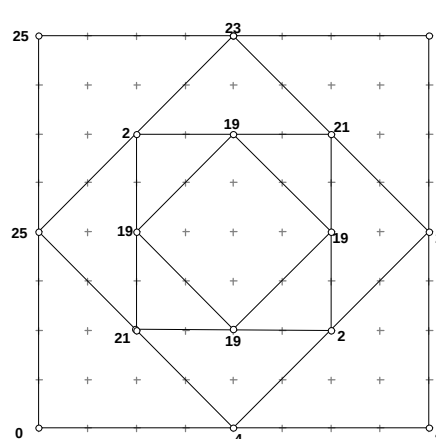
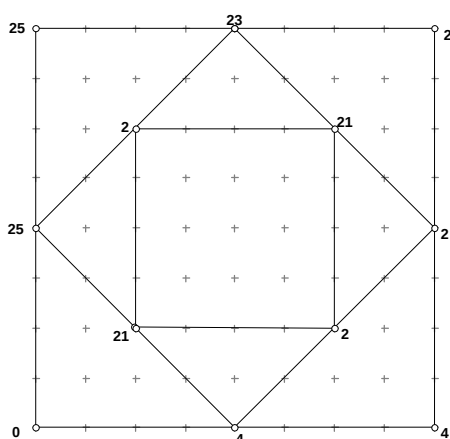
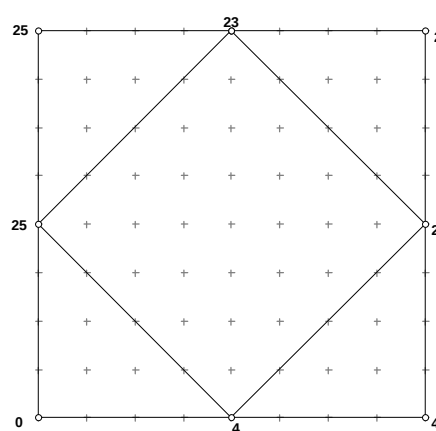
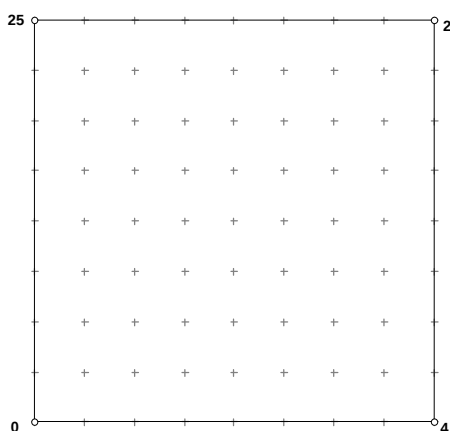




Con lo cual llega a lo solicitado, que es un cuadrado con sus vértices rotulados con el mismo número **natural**.

Pueden también presentar otra ordenación en los vértices, que en la discusión con el grupo será importante, ya que con otra ordenación la cantidad de cuadrados inscriptos necesarios puede ser igual o distinta, pero el proceso de hacer las diferencias en valor absoluto sigue siendo finito.

Para el cuadrado de vértices (25, 0, 4, 2), el alumno puede hacer la siguiente secuencia:



¿Cuántos pasos fueron necesarios para lograr que en todos los vértices aparecieran los mismos números?

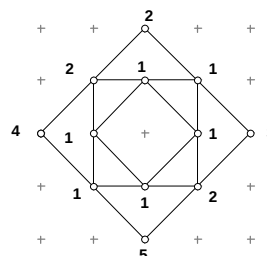
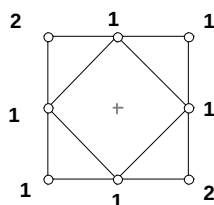
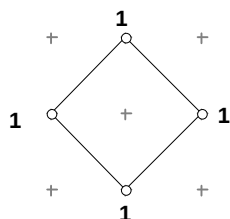
En estas dos secuencias de cuadrados el alumno ha realizado diferencias en valores absolutos, restando los números que aparecen en los vértices en forma conveniente para que el resultado resulte positivo.

En este punto el alumno, al responder que en el primer caso hicieron falta seis cuadrados y en el segundo cuatro (si toma este mismo orden, puede que tome otro orden y la respuesta varíe), puede observar que en estos casos las diferencias, en valor absoluto, que se pueden hacer entre los números son finitas.

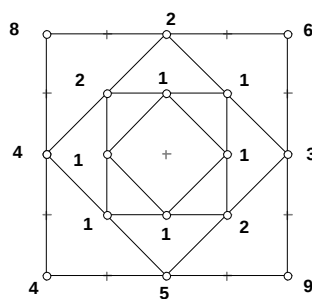
Prueba a construir una serie de cuadrados procediendo en orden inverso, es decir comenzando por el cuadrado central con números idénticos en los vértices.

En este punto, si los alumnos no han observado las regularidades que se presentaron en el ejemplo propuesto, y en los realizados por ellos (los números que aparecen en los vértices de las diagonales del penúltimo cuadrado son iguales, los números que aparecen en los vértices consecutivos dos a dos en el antepenúltimo cuadrado son iguales), les resultará difícil realizar esta actividad. Se han puesto estos ejemplos para que se observe esta regularidad, aunque con otros rótulos aparece otra regularidad.

Si han observado la primera de estas regularidades, una propuesta podría ser:



Pudiendo terminar con este cuadrado o con otro siguiente, siempre que no se repitan los números que rotulan los vértices. Por ejemplo podrían seguir con el siguiente:



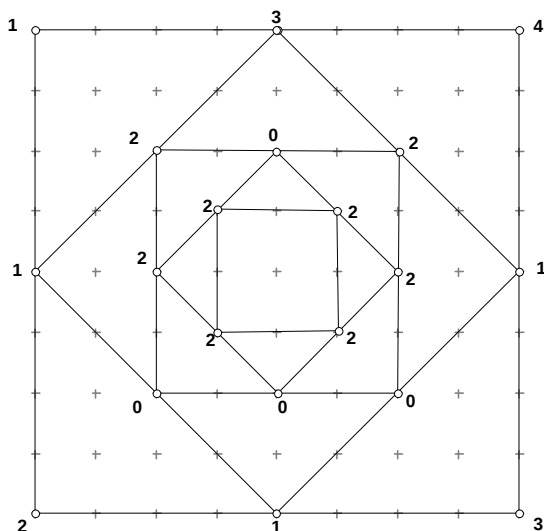
Lo cual podría llevar al alumno a tratar de resolver situaciones como

$|x - y| = 1$ y $|y - x| = 1$, aunque sin utilizar el signo de valor absoluto porque no lo conoce.

Si limitamos el valor que se puede poner en los vértices a los números 1, 2, 3 y 4.

¿Cuántos pasos serán necesarios para lograr que en todos los vértices aparezcan los mismos números?

En este punto los alumnos, pueden seguir colocando los rótulos en cualquier vértice del cuadrado, pero si los colocan en el orden prescripto, el uno en el vértice superior izquierdo y los siguientes números en el orden que aparecen y en el sentido contrario a las manecillas del reloj, la sucesión de cuadrados sería la siguiente:



Algunos alumnos (si se trabaja en segundo ciclo) podrían proponer otra forma de realizar la secuencia, que no sea construyendo cuadrados sino colocando los números en una tabla y calculando las diferencias, por ejemplo:

1	2	3	4				
1	1	1	3				
	0	0	2	2			
		0	2	0	2		
			2	2	2	2	

En ambos casos el alumno responderá que fueron necesarios cuatro cuadrados inscriptos, o cuatro filas (sin contar la inicial) o cuatro pasos, según sea el caso que haya elegido para representar la situación, con lo cual seguirá observando la finitud de las diferencias en valor absoluto.

🖋️🖋️🖋️🖋️ Con los mismos números pero en otro orden, ¿Cuál es la serie más larga de cuadrados que se puede hallar? ¿Cuál la más corta?

En este punto, el alumno podrá realizar todas las permutaciones posibles de los vértices, y si eligiera por ejemplo la segunda representación (por tablas) la resolución sería la siguiente:

Iteration 1000							
--	--	--	--	--	--	--	--



1 3 4 2	2 3 4 1	3 1 4 2	4 3 1 2
2 1 2 1	1 1 3 1	2 3 2 1	1 2 1 2
1 1 1 1	0 2 2 0	1 1 1 1	1 1 1 1
	2 0 2 0		
	2 2 2 2		
1 3 2 4	2 3 1 4	3 1 2 4	4 3 2 1
2 1 2 3	1 2 3 2	2 1 2 1	1 1 1 3
1 1 1 1	1 1 1 1	1 1 1 1	0 0 2 2
			0 2 0 2
			2 2 2 2
1 4 2 3	2 4 1 3	3 4 2 1	4 1 2 3
3 2 1 2	2 3 2 1	1 2 1 2	3 1 1 1
1 1 1 1	1 1 1 1	1 1 1 1	2 0 0 2
			2 0 2 0
			2 2 2 2
1 4 3 2	2 4 3 1	3 4 1 2	4 1 3 2
3 1 1 1	2 1 2 1	1 3 1 1	3 2 1 2
2 0 0 2	1 1 1 1	2 2 0 0	1 1 1 1
2 0 2 0		0 2 0 2	
2 2 2 2		2 2 2 2	

Algunos alumnos se darán cuenta que sólo hacen falta seis ordenaciones de los números para representar todos los casos posibles, en donde realizarían sólo seis de estas tablas, serían las correspondientes a una de las columnas precedentes. Podrían justificar diciendo que presenta seis series de cuadrados, ya que las otras se obtienen rotando cuatro veces 90° el cuadrado (cuatro veces por seis dan las veinticuatro posibilidades).

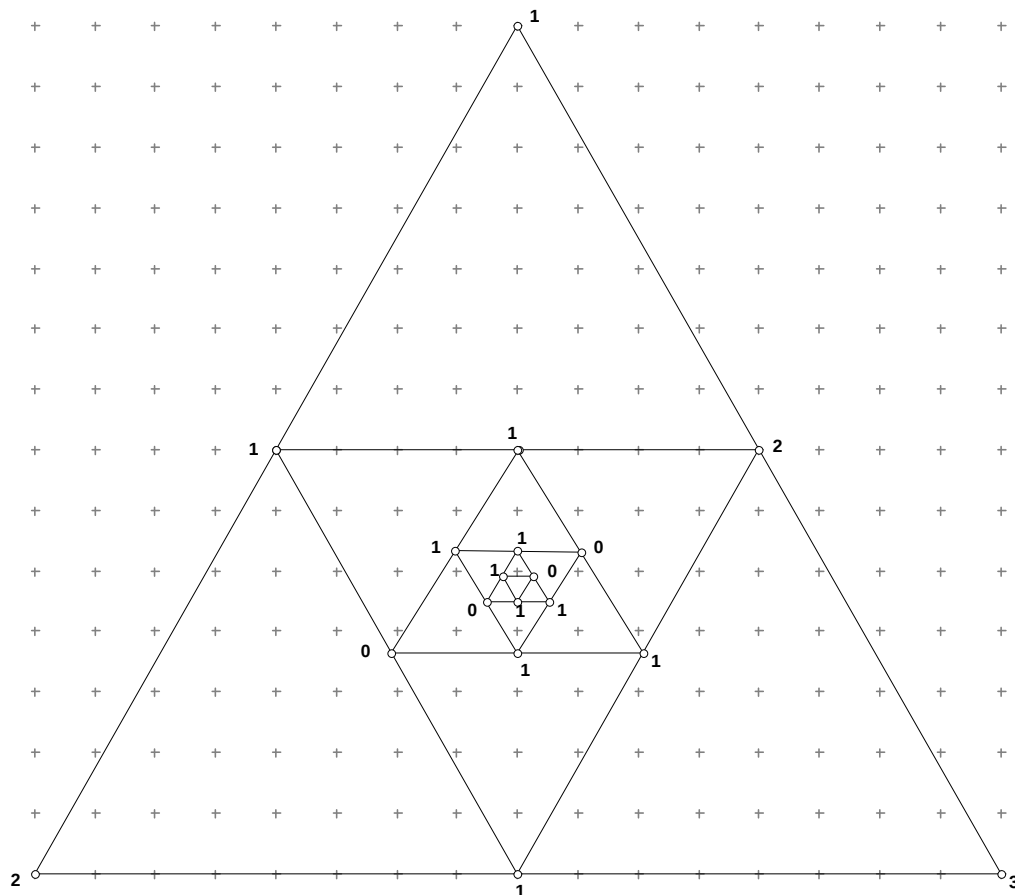
En cuanto a lo solicitado por la actividad, los alumnos responderían que son necesarias como mínimo dos diferencias y como máximo cuatro diferencias si lo realizan con tablas, o responderían que son necesarias series de dos cuadrados inscriptos (como mínimo) y cuatro cuadrados inscriptos (como máximo). También pueden hacer notar que no hay series de tres cuadrados inscriptos. En todos los casos no se cuenta el cuadrado original, ya que se pretende que cuenten pasos o sea diferencias en valor absoluto.

🔵🔵🔵🔵🔵 Si ahora realizamos la misma actividad pero con un triángulo en el punto de partida, utilizando los números 1, 2, 3 y 4 (es decir ir tomando de a tres estos cuatro números y con ellos rotular los vértices). ¿En qué se diferencian los resultados?.

En este punto los alumnos procederán realizando triángulos rotulando sus vértices con los números 1, 2 y 3 primero, con sus permutaciones, luego 1,2 y 4, con sus permutaciones, y así siguiendo hasta agotar todas las posibilidades.



Si realizan los triángulos, una serie de triángulos podría ser:



En esta serie de triángulos, los alumnos ya pueden intuir que las diferencias en valor absoluto no son finitas, pero deberán probar con todos los posibles ordenamientos de los rótulos, para llegar a que en un triángulo, con los números 1, 2, 3 y 4 en sus vértices (en sus distintas ordenaciones), las diferencias en valor absoluto son infinitas. Tal vez no aparezca la palabra "infinitas", pero dirán que el proceso de hacer diferencias en valor absoluto no puede terminar.

- Pueden llegar a hacer más triángulos inscriptos, pero cuando vean que el proceso no acaba, verán que hay series de ternas que se van repitiendo, y las diferencias en valor absoluto nunca podrán llegar a ser todas iguales.

Curiosidades matemáticas

Curiosidad Nº 6

Las siguientes son reglas para actuar, que según en el año en el cuál enseñamos son válidas o no.

1. Sólo se puede dividir **a** por **b** si **a** es más grande que **b**
2. Sólo se puede restar **a** de **b** si **a** es más pequeño que **b**
3. Cuando se dividen dos números, el resultado es más chico que alguno de esos números.
4. Cuando se suman dos números, la suma es más grande que cada uno de esos dos números.
5. Para plantear una suma en columna, se alinean las cifras de derecha a izquierda.
6. Cuando calculo la raíz de un número el resultado es más chico que ese número.

Indicar para qué conjuntos numéricos son válidas estas reglas y para cuáles no lo son.

Solución del número 5

Cuando se llega a esta expresión $2a(a-b) = a(a-b)$ se propone simplificar por $(a-b)$, pero se partió del supuesto que $a=b$, por lo que $(a-b)=0$, es decir debo multiplicar a ambos miembros por el inverso de $(a-b)$, y 0 no tiene inverso, de allí proviene el error del resultado. Nuevamente no se asusten 2 no es igual a 1. Es interesante presentar este tipo de pruebas a los alumnos, ya que pueden ver el significado de la simplificación, observando que no es una regla más que se le ocurrió a algún matemático, sino una aplicación de las propiedades de la multiplicación en los números racionales.

Bibliografía

-  Boyer, Carl. "A History of Mathematics". John Wiley & Sons, INC. New York. 1968.
-  Núcleos de aprendizaje prioritarios Nivel Inicial. Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología de la Nación Argentina. 2004. Argentina
-  Núcleos de aprendizaje prioritarios Primer Ciclo EGB. Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología de la Nación Argentina. 2004. Argentina
-  Fregona, Dilma. "El libro de la Matemática 7". Libro para el docente. Editorial Estrada. 1998.
-  Pelletier, Jean – Louis. "Etapas de la Matemática". Editorial Losada S.A. Buenos Aires. Argentina. 1958.
-  Rey Pastor, J; Babini, J. "Historia de la Matemática". Espasa – Calpe Argentina. Buenos Aires. México. 1951.
-  Segura, Sandra. "Diversión con la resta". Trabajo sin publicar. Argentina. 2001.