

## Superficies en el espacio de la geometría tridimensional



El Equipo

Resulta interesante conocer que, entre los objetos geométricos a estudiar en la geometría elemental tridimensional están las superficies. Algunas son biláteras o sea, tienen dos caras. Hay otras que sorprenden porque tienen una sola cara es decir, son uniláteras.

El estudio de las superficies es propio de la Topología (la geometría más amplia, en el sentido de la inclusión, según Félix Klein, entre las Geometrías Kleinianas. No obstante su tratamiento puede adecuarse para la geometría escolar: “Es una mirada topológica en la geometría escolar tridimensional (Trejo, C.; 1983)

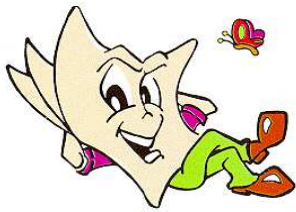
Palabras clave: superficies biláteras, uniláteras.

## ① PARA APRENDER



**Superficies en el espacio de la geometría tridimensional**

## ② PARA DIVERTIRSE



**Construir una Banda de Moebius**

## ③ PARA LEER



**Un cuento**

## ① PARA APRENDER

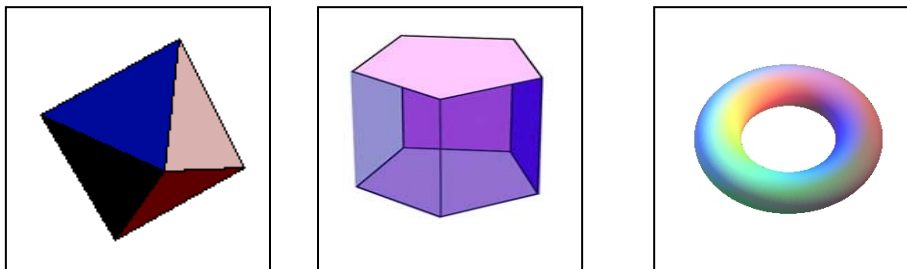


**Superficies en el espacio de la geometría tridimensional.**

En la geometría tridimensional (o sea, en tres dimensiones) podemos considerar las superficies.

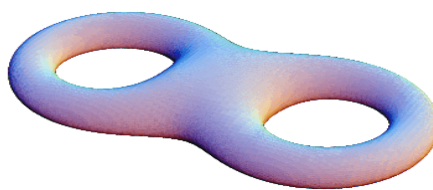
Hay algunas que son biláteras o sea que tienen dos caras. Y, entre éstas, se distinguen las *cerradas* de las *abiertas*.

Ejemplos de las superficies biláteras cerradas se representan a continuación.



Corresponden, de izquierda a derecha, a la superficie octaédrica, prismática y a la superficie de un toro de revolución. Desde la intuición es fácil darse cuenta por qué decimos que son cerradas. Tienen una cara interior y otra exterior.

La siguiente es la representación de una superficie tórica con dos agujeros.



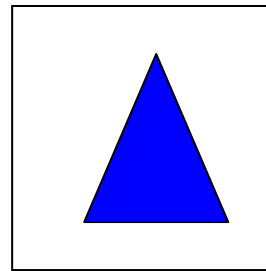
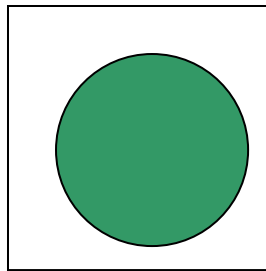
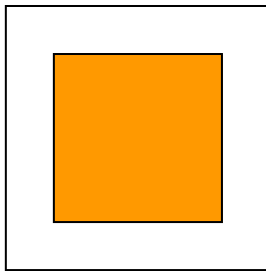
Sitio web de la imagen

<http://mathworld.wolfram.com/DoubleTorus.html>

Encontrada 23/06/2011

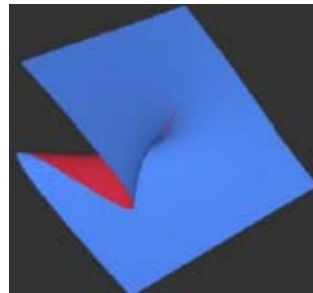
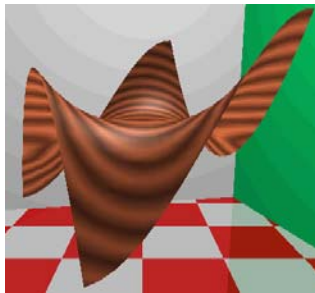
También hay superficies biláteras abiertas.

Las siguientes son tres representaciones de esas superficies. Por un borde pasamos de una cara a la otra, lo que no ocurre en el caso anterior.



De izquierda a derecha están representadas tres superficies abiertas: de un cuadrado, de un círculo y de un triángulo. Son planas.

Las siguientes son representaciones de dos superficies biláteras abiertas, no planas.



La representada a izquierda se conoce como *silla del mono*

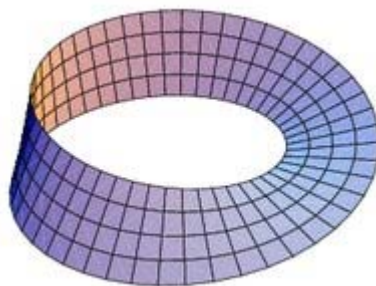
Sitio web de la imagen

[http://xtsunxet.usc.es/cordero/miscelanea/silla\\_del\\_mono.htm](http://xtsunxet.usc.es/cordero/miscelanea/silla_del_mono.htm)

Encontrada 23/05/2011

### Ahora viene la sorpresa!!!

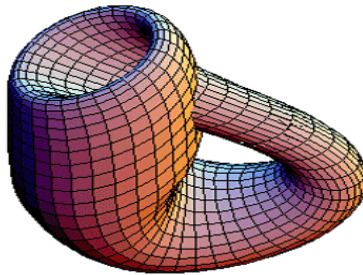
Hay superficies de una cara. Te mostramos las representaciones de dos de ellas: la Cinta de Moebius y la Botella de Klein.



Sitio web de la imagen

es.wikipedia.org

Encontrada 23/05/2011



Sitio web de la imagen  
uventicus.org

La Botella de Klein es una superficie cerrada con una sola cara y sin interior. Dos cintas de Moebius unidas por los costados forman una Botella de Klein.

**Nota:** las imágenes de la cinta de Moebius y de la Botella de Klein están generadas del software Mathematica®

**Para tener en cuenta:**

Habrá notado el lector el uso de la palabra *representación* cada vez que proponemos una imagen.

Ocurre que los objetos geométricos son abstractos. Por tanto cada imagen, foto, dibujo, etc. es una representación del objeto abstracto en el mundo real.

Por supuesto que eso ocurre en toda la Matemática

## ② PARA DIVERTIRSE



**Construir una Banda de Moebius**

### **Construir una Banda o cinta de Moebius**

Es bastante sencillo construir una representación de la Cinta de Moebius usando una tira de papel.

Se necesita una simple tira larga rectangular de papel. Una sus dos extremos con un pegamento o cinta adhesiva pero previamente rote uno de sus extremos  $180^\circ$  respecto al otro. Si lo ha hecho bien obtendrá una figura bidimensional, una especie de lazo, que se pliega espacialmente en forma de 8 o de signo de infinito.



A pesar de su apariencia tiene una sola cara. Para comprobarlo basta con pasar un dedo o dibujar con un lápiz una línea superficial sobre la banda: se recorren las dos caras primitivas de la cinta inicial y se llega hasta el comienzo, tras pasar por el punto inicial dos veces más, una por el lado opuesto de la cinta y, la segunda, por el mismo lado del inicio cuando se completa el recorrido.

Otra propiedad curiosa de la banda de Moebius es que si se corta la banda a lo largo de una línea que siguiese línea dibujada en el centro del lazo, en vez de quedar este dividido en dos lazos, se convierte en un lazo único con dos caras.



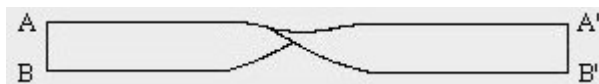
Detalladamente describimos el proceso de construcción de una cinta de Moebius. Ya sabe que se trata de una representación.

### Construcción de una banda de Moebius

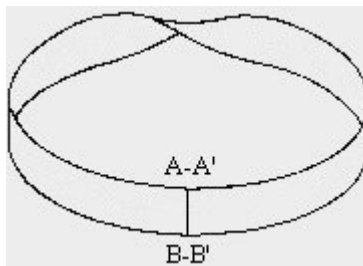
1º) Se recorta una tira rectangular de papel.



2º) Uno de los extremos se gira 180º.



3º) Los extremos libres se pegan.



Para seguir jugando:

Una vez que la hemos construido, el juego consiste en hacer en ella un corte longitudinal.

Pero antes de darlo y darle mayor espectacularidad al juego conviene que primero hagamos al visitante pensar qué ocurre al realizar ese corte en otras superficies relacionadas:

No hay ni interior ni exterior

### 3 PARA LEER



## Un cuento

Ahora que conoces acerca de las superficies y, entre ellas a la cinta de Moebius, se entiende el cuento para el aula:

### El califa persa y los pretendientes de sus hijas<sup>1</sup>



- 1- Alderete, M. J. y Núñez, A. M. (2006) Topología. Mendoza: FEEYE: Universidad Nacional de Cuyo. Libro digital



Sección Cuentos y Juegos

# Cuentos para el aula

## EL CALIFA PERSA Y LOS PRETENDIENTES DE SUS HIJAS

Un viejo cuento

Adaptación M.J.Alderete

El nombre **Persia** proviene del latín Persia(e), y éste del griego Περσίς y Περσική; gent. El término **Persia** alude a una región histórica de Oriente Medio, al este de Mesopotamia, hoy en día Irán.



### IMPERIO PERSA

En el Imperio Persa hubo un califa que tenía dos hijas: Jazmín y Estefanía.  
Para casarlas les puso una condición a los pretendientes.



- ¿Cuál?
- Tiene que leer el cuento

## Índice general

1- Una historia para contar .....	3
2. El primer problema del califa. ....	4
3. El segundo problema del califa .....	5
3. El tercer problema del califa .....	6
3. El cuarto problema del califa .....	7

## 1- Una historia para contar

La idea de un dentro y un fuera ayuda a resolver problemas interesantes, como el de la vieja historia de un califa persa que utilizó problemas topológicos para elegir el marido de sus bellísimas hijas.

Había una vez un califa que no quería que sus hijas se casaran con candidatos poco inteligentes y que no tuvieran saberes topológicos.

La princesa más grande se llamaba Jazmin y la menor, tenía como nombre Estefanía.

Las dos tenía tantos pretendientes que su padre decidió elegir al que resolviera los problemas que pasamos a contarles.

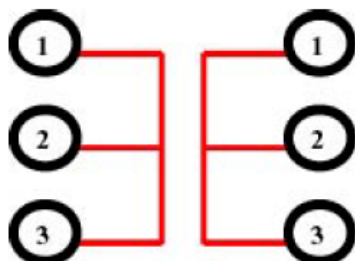
Primero tenía que casar a Jazmín. Unos dice que la hija quedó soltera pero...otros me contaron otro final.

Lo mismo con respecto a Estefanía.

Como éste es un cuento tenemos que esperar.

## 2. El primer problema del califa.

La figura siguiente representa el primer problema que el califa propuso a los pretendientes de su hija Jazmín.

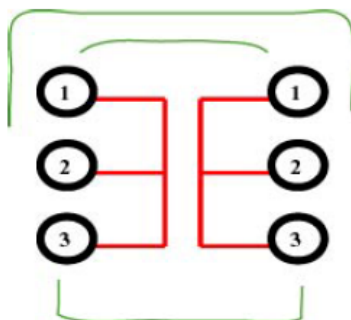


El problema consistía en conectar los mismos números mediante líneas que no se crucen entre sí ni con ninguna otra línea de la figura. Cualquier pretendiente que resolviese este problema con éxito podría hablar a la hija del califa.

Se trataba de un problema fácil y estimuló a todos los pretendientes. Le hicimos una propuesta.

Trate de ver si puede resolverlo. ¿Habría sido autorizado para hablar con la hija del califa?

Una solución de este problema puede ser la siguiente.



La historia cuenta que muchos pretendientes pasaron la primera prueba. Muchos pudieron charlar con la joven.

Entonces el califa persa que tenía saberes matemáticos y se acordaba de algunas cuestiones que le habían enseñado en la escuela complicó el problema para reducir el número de pretendientes.

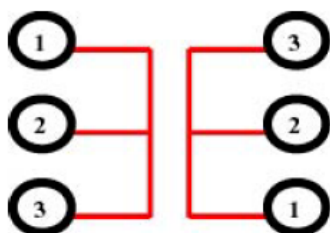
Al segundo problema se lo contamos a continuación

### 3. El segundo problema del califa

El pretendiente de Jazmín tenía que resolver un segundo problema.

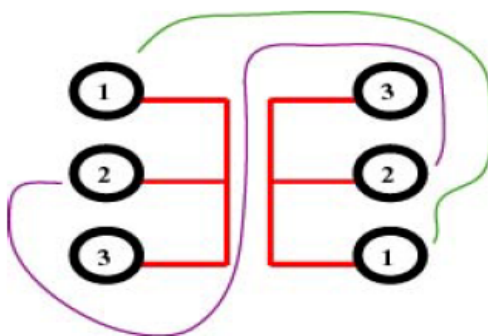
Este consistía también en conectar los mismos números con líneas, que ni se crucen entre sí, ni con ninguna otra línea de la figura.

Pero el dibujo ha cambiado. Observe las modificaciones que propuso el califa.



¿Podemos resolver este segundo problema? Alguien me contó que la hija del califa murió soltera. Me lo dijo alguien que conocía algo de los grafos.

Vea lo que ocurre.



Trazamos en verde una línea verde de 1 a 1, y una azul de 2 a 2.

Pero no pudimos trazar ninguna línea de 3 a 3 siguiendo los requisitos del problema.

Si usted se fija bien encontrará la línea curva cerrada simple (curva de Jordán) que apareció al dibujar las otras dos líneas. Esa curva ha separado los puntos del plano, no pertenecientes a ella, en dos regiones: interior y exterior.

**Nadie puede ir del interior al exterior de una curva cerrada simple sin cruzarla!!!**

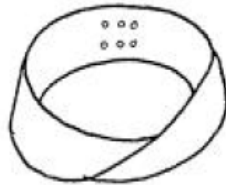


### 3. El tercer problema del califa

El califa quería que su hija Jazmín no se desanimara por no encontrar pretendiente. Para mostrarse generoso y comprensivo volvió a presentar el problema, seguro de que nadie podía resolverlo.

No puso ningún otro requisito que el que ya mencionamos.

Oh sorpresa!!! Había un pretendiente de su hija, que era muy creativo, muy intuitivo y que además había escuchado el cuento de la hormiga y sus viajes por distintas superficies.



Se acordó de la cinta de Moebius. Resolvió el problema. Encontró la solución porque esa cinta tiene una sola cara.

#### Conclusión

La hija del califa Jazmin se casó y el califa se puso a estudiar más Topología.

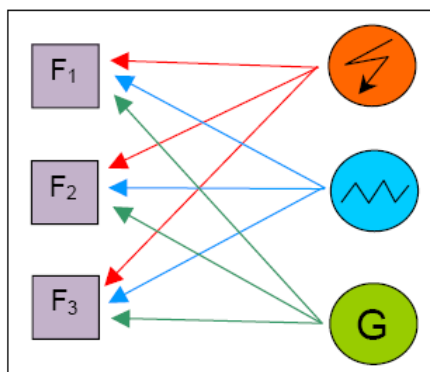
Aprendió que siempre hay otro que sabe más que uno.

### 3. El cuarto problema del califa

Desanimado por lo de su hija Jazmín, el califa buscaba ansiosamente un problema para los candidatos de su hija Estefanía.

Pensó que era una buena ocasión para presentar otra historia: la del hombre que quería pagar una fortuna para que le conectaran los medidores de agua, luz y electricidad con sus tres casas sin que las conexiones se crucen en el mismo nivel.

El arquitecto a cargo de la obra, que sabía de grafos, no le hacía entender que estaba ante un problema irresoluble.



También en ese problema están presentes las regiones interior y exterior que determina una curva cerrada simple.

Pasaron muchos pretendientes sin poder resolver este problema. Al fin llegó un pretendiente que era un joven matemático. También sabía de Topología, de grafos y de superficies.

Hizo una propuesta: hacer las instalaciones en una superficie como la superficie del toro de revolución. El sabía que el grafo que representa el problema no es otro que el grafo completo  $K_{3-3}$ .

Este grafo es realizable en la superficie del toro que tiene género uno, y no en la superficie esférica, de género cero.

El califa no podía creer cuánto tenía que seguir estudiando. Lo cierto es que Estefanía encontró un pretendiente inteligente que sabía de Topología. Se casó.

Se casaron las dos hijas del califa.

ya conoce el final del cuento.

## REFERENCIAS

- **Alderete, M. J. y Núñez, A. M.** (2004) *Topología*. Mendoza: FEEYE: Universidad Nacional de Cuyo. Libro digital
- **Fréchet, M., Fan Ky,** (1959), *Introducción a la Topología Combinatoria*, Buenos Aires, Editorial Universitaria de Buenos Aires, EUDEBA.
- **Santaló, L.,** (1993). *La Geometría en la formación de Profesores*, Buenos Aires, Red Olímpica.
- **Coxeter, H. S. M.** (1971). *Fundamentos de Geometría*, Limusa-Wiley, México.
- **Coxeter, H. S. M.,** (1963). *Regular Polytopes*, Dover, Nueva York.
- **Coxeter, H. S. M.,** (1974). *Regular Complex Polytopes*, Cambridge University Press.
- **Cromwell, P. R.** (1997). *Polyhedra*, Cambridge University Press.

### En la red

- Toro con dos agujeros

<http://mathworld.wolfram.com/DoubleTorus.html>

Encontrada 23/05/2011

- Superficies

<http://xtsunxet.usc.es/cordero/miscelanea/miscelanea.htm>

Encontrada 23/05/2011

- Articulando puentes pedagógicos didácticos. Capítulo Matemática. DGE.

Gobierno de Mendoza

<http://www.dpee.mendoza.edu.ar/docu/articulacion/MATEMATICA%207mo.pdf>

Encontrada 21/05/2011