Desafío 1: Asesores de envasado de aceite

Desafío 2: La fábrica de bebidas gaseosas

Orientaciones para los docentes:

Los dos desafíos de aprendizaje que se proponen abordan la posibilidad de trabajar con las distintas formas de representar un número racional, como fracciones y como número decimal y encontrar criterios que les permitan a los alumnos decidir cuándo es conveniente trabajar con una representación o la otra. Los dos desafíos se vinculan con NAP del Ciclo Básico de Nivel Secundario[1] y se constituyen en una interesante oportunidad para integrar los diferentes aspectos vinculados a números racionales. Es conveniente avanzar con el segundo desafío una vez resuelto el primero pues la propuesta de la fábrica de gaseosas retoma y complejiza lo construido en el desafío de envasado de aceite.

En el Anexo que figura al final de los desafíos se plantea un conjunto de actividades que son opciones para que cada docente decida si las incluye como actividades previas a desarrollar con el grupo total de alumnos o las incorpora en el marco de la tutoría en función de las particularidades del grupo y de lo trabajado previamente con números racionales. El anexo 1 permite dar respuesta a la pregunta: "¿Siempre se trabajó con fracciones?". Los otros anexos consideran: fracciones equivalentes, operaciones con fracciones, conversión de fracciones en decimales y viceversa. También se incluye como anexo "Casi 1" que abre alternativas para seguir investigando sobre números decimales periódicos.

Autor de los desafíos: Prof. Diego Melchiori, especialista en Matemática. Asesoramiento pedagógico: Noemí Scaletzky y Guillermo Golzman

[1] NAP

-Usar diferentes representaciones de un número racional (expresiones fraccionarias y decimales, notación científica, punto de la recta numérica, etc.), argumentando sobre su equivalencia y eligiendo la representación más adecuada en función del problema a resolver.

-El reconocimiento y uso de las operaciones entre números racionales en sus distintas expresiones y la explicitación de sus propiedades.

-Seleccionar la forma de expresar los números involucra decidir si se va a operar con expresiones fraccionarias o decimales.

Desafío 1: Asesores de envasado de aceite

Para comenzar

Respondamos algunas preguntas para iniciar la tarea:

- ¿Cómo podemos interpretar una fracción?
- ¿Por qué estudiamos fracciones?
- ¿Y los números decimales qué representan?
- ¿Qué relación hay entre fracciones y decimales?
- ¿Es lo mismo operar con fracciones que con números decimales? ¿Por qué?
- ¿Hay cuentas más fáciles de realizar con fracciones? ¿Y con decimales?

Resolvemos el desafío 1

Desafío. ASESORES DE ENVASADO

En una aceitera se fracciona el aceite en botellas de distinta capacidad: ½ litro, ¾ litro y de litro y medio. Recibieron un tanque con 200 litros de aceite y quieren saber cuánto aceite les sobrará si llenan la misma cantidad de botellas de cada tipo.

Para resolver el desafío vas a tener que realizar diferentes cálculos. Tené en cuenta que aparecen cantidades dadas en fracciones y otras como número decimal. Vas a tener que decidir cuándo es conveniente hacer cálculos usando fracciones y en qué casos utilizar números decimales.

Tomá nota de las respuestas a estas preguntas antes de resolver el desafío:

- ¿Qué cálculos podríamos realizar utilizando fracciones?
- ¿Qué cálculos podríamos realizar utilizando decimales?
- ¿Podemos hacer todos los cálculos de una sola manera?
- ¿Convendrá hacer algunos cálculos de una forma y otros de la otra?

Manos a la obra:

- ¿Qué fracciones aparecen en el desafío? ¿Qué parte representan?
- Si quisiéramos sumar la cantidad de aceite que necesitamos para llenar un envase de cada tipo, ¿podríamos sumar las fracciones que representan su contenido?
- ¿Hay algún número en expresión decimal? ¿podés pasarlo a fracción? ¿nos ayuda esto a realizar los cálculos necesarios?

Una vez que hayas resuelto el desafío volvé sobre los cálculos que anotaste y considerá cuáles podemos realizar más fácilmente al trabajar con fracciones y los que resultan más sencillos para ser realizados en notación decimal.

Resolvemos el desafío 2

Desafío: LA FÁBRICA DE BEBIDAS GASEOSAS

Una empresa de gaseosas envasa sus productos en diferentes tipos de envases:
Latas de 1/3 de litro
Botellas de 3/4 de litro
Botellas de 1,5 litros
Al llegarle un pedido de 150 unidades de cada tipo para un supermercado, surgió la duda de si para calcular la cantidad de gaseosa que necesitaban era mejor utilizar números decimales o fracciones

En este desafío encontrarás una situación similar al desafío del "envasado de aceite" pues hay involucradas fracciones y números en expresión decimal con los que tendrás que realizar distintos cálculos.

Antes de resolver el desafío tomá nota de los cálculos que considerás tendrías que realizar

Manos a la obra:

- Resolvé el desafío y explicá por qué elegiste cada tipo de cálculo.

Comparando lo realizado en los desafíos 1 y 2:

Retomá la información que averiguaste y el trabajo que hiciste con el desafío del aceite o el de las gaseosas:

- *¿Realizaste los cálculos de diversas maneras?*
- *¿Cómo te ayudó elegir un método sobre el otro?*
- *¿Consideraste en algún caso que daba lo mismo utilizar un método u otro? ¿En cuál?*
- *Al comienzo del trabajo con cada desafío armaste una lista con los cálculos que creías que debías realizar para resolver el desafío ¿Hubo nuevos cálculos que debiste realizar y que no habías considerado? ¿Cuáles?*

Anexo

1- Números con historia

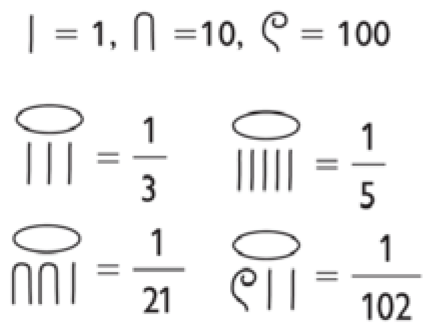
¿Cómo repartir un pan entre diez personas?

Con este problema comienza uno de los textos más antiguos de la matemática (el papiro Rhind, aprox. 1600 aC). ¿Cómo responderías a este problema?

Números y fracciones en el antiguo Egipto

En el papiro sólo encontramos la solución y la verificación de que el resultado es correcto.

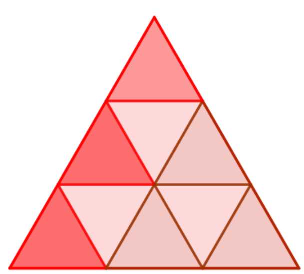
En estos problemas de reparto encontramos el origen de la noción de fracción, aunque la forma de escritura en la antigüedad no era la misma que en nuestros días.



Ya en los escritos matemáticos más antiguos que se han hallado, encontramos indicios del trabajo con números fraccionarios. En el antiguo Egipto, se utilizaban únicamente fracciones cuyo numerador fuera el número uno, lo que permitía escribirlas agregando un solo símbolo en su notación. En Mesopotamia, utilizaban fracciones cuyos denominadores eran potencias de 60. La necesidad de expresar partes de un todo hizo surgir la necesidad del trabajo con estos números. Habrá que esperar más de tres mil años para que se comience a utilizar la expresión decimal de las fracciones, a partir de la expansión del sistema indo-arábigo de numeración y los trabajos de Simón Stevin y John Napier.

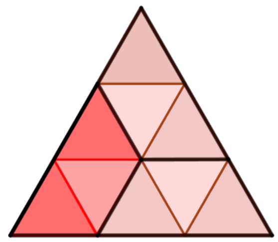
2- Recordando fracciones equivalentes

Una forma de interpretar las fracciones es como parte de un todo. Así, si tenemos una unidad dividida en una cierta cantidad de partes iguales y tomáramos algunas de ellas, podémos representar esta situación con una fracción:



El triángulo grande está dividido en 9 triángulos iguales, de los cuales 3 de ellos están pintados de rojo, la fracción que representa esta cantidad sería entonces 3/9, se tomaron 3 de 9 partes.

Un aspecto a tener en cuenta en el trabajo con fracciones y que demanda mayor atención, es que una misma fracción puede representarse de muchas formas.



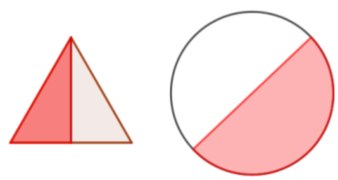
Podríamos considerar que el triángulo grande, que es el mismo, está dividido en 3 partes iguales (las marcadas con bordes negros) y una de ellas está pintada de rojo, por lo que la fracción que representaría esta cantidad sería 1/3, es decir, 1 de 3 partes. Pero en uno u otro caso, la cantidad pintada es la misma, es por esto que

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$$

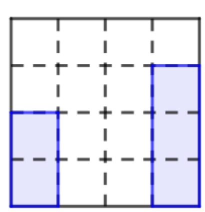
A estas fracciones que representan la misma cantidad, las llamábamos **equivalentes**.

3- Sumando cantidades representadas por fracciones

Si queremos sumar distintas cantidades representadas por fracciones se nos presentan varias dificultades. En principio, la unidad dividida en partes debe ser la misma:



En los dos dibujos, la parte pintada está representada por ½, sin embargo, no representan la misma cantidad, pues la unidad considerada en cada caso no es la misma. En este caso, no podremos realizar ½ + ½ para saber qué fracción representa la parte pintada.
Si consideramos la misma unidad, dividida en la misma cantidad de partes iguales, la suma resulta sencilla. Supongamos que dos pintores están pintando una pared. Si el primero pinta 2/16 de la pared y el otro pinta 3/16 ¿qué fracción representaría la porción de pared pintada por ambos?
Si representamos la pared con un cuadrado y lo dividimos en 16 partes iguales, la parte pintada por el primero serían 2 de estas partes y la pintada por el otro serían tres de las mismas:

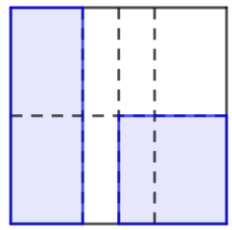


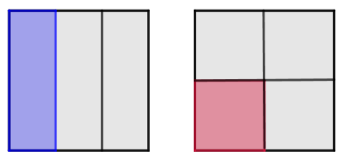
Siendo el total pintado por ambos 5 partes de las 16 en las que está dividida la unidad. Al estar ambas partes representadas con la misma división de la unidad (en 16 partes), el total surge de sumar la cantidad de partes pintada por cada uno. Como operación entre fracciones, esto representaría la suma entre las fracciones que pintó cada uno:

$$\frac{2}{16} + \frac{3}{16} = \frac{2+3}{16} = \frac{5}{16}$$

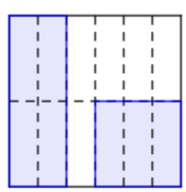
Es decir, el total pintado son 5 de 16 partes en que está dividida la unidad.

Pero muchas veces tenemos que sumar fracciones de una misma unidad pero que no está dividida en partes iguales:
Si nuestros pintores hubieran pintado 1/3 de la pared y el segundo ¼ ¿Qué fracción representaría la porción de pared pintada por ambos?
En este caso, para realizar la representación como hicimos antes, deberíamos en el caso del primer pintor dividir la unidad en tres partes y en el caso del segundo en cuatro:





Para poder sumar estas cantidades (1/3 y ¼) podemos recurrir a las fracciones equivalentes, dado que si las unidades están divididas en la misma cantidad de partes podemos sumar como en el ejemplo anterior.
Deberíamos buscar fracciones que representen las mismas cantidades pintadas, pero que provengan de dividir la unidad en la misma cantidad de partes. (por lo antes expuesto es una división de la unidad forzada ya que de la construcción no surge la necesidad de dicha división, sino que llevando a que la suma puede hacerse con fracciones con igual denominador, por eso dividimos, por el otro camino surge naturalmente la división de la unidad)
Dividiendo la unidad en 12 partes iguales:



la parte pintada por el primer pintor (del lado izquierdo) queda cubierta con 4 de estas partes De este modo $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$. Por otro lado, la parte pintada por el segundo pintor (del lado derecho) quedan cubierta con 3 de estas partesresultando $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.
De este modo, podemos sumar ahora para contestar la pregunta:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{4+3}{12} = \frac{7}{12}$$

4- Convertir fracciones a su expresión decimal y viceversa

Con una calculadora común (no científica) o con la del celular, no podemos operar con fracciones, pero podemos de una forma rápida convertir una fracción a su expresión decimal. Para esto tenemos que utilizar otra interpretación de la fracción, como cociente. Si tuviéramos, por ejemplo, la fracción ¾, se la puede interpretar como el cociente entre tres y cuatro. Esta cuenta no tiene resultado exacto dentro de los números enteros, pero en notación decimal (con coma), sí lo tiene. Si hacemos 3 dividido 4 en la calculadora, obtenemos 0,75 por resultado, es decir:

$$\frac{3}{4} = 0{,}75$$

Estos dos números representan la misma cantidad, pero están expresados de forma distinta, uno como fracción y el otro como expresión decimal.

Para ciertos cálculos, el trabajar con la expresión decimal nos facilita las cuentas. Si quisiéramos calcular $\frac{2}{5} + \frac{1}{4}$, deberíamos trabajar como en el ejemplo anterior. Sin embargo, al cambiar los números de expresión obtenemos:

2 : 5 = 0,4

1 : 4 = 0, 25

Y podemos operar en notación decimal:

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{4} = 0{,}4 + 0{,}25 = 0{,}65$$

El problema surge con ciertas fracciones cuya expresión decimal no es finita, lo que llamamos **expresiones decimales periódicas.** Si quisiéramos convertir 1/3 a expresión decimal, obtendríamos:

1 : 3 = 0,3333333333333333333333333333……….

Y esta expresión tiene infinitas cifras decimales. Si bien en algunos casos se pueden sumar este tipo de expresiones (por ejemplo: 0,33333….+0,1111….=0,444444….) en otros casos no podemos operar del mismo modo que con expresiones decimales finitas (¿Cómo sumarías 0,33333…. Con 0,88888….?)

Volviendo al desafío ¿hay alguna fracción cuya expresión decimal sea periódica? ¿genera esto que no podamos hacer los cálculos necesarios? ¿Cómo podremos hacerlos?

Si tuviéramos un número en expresión decimal, existe un método para convertirlo en fracción que se basa en la división por potencias de 10, habitualmente llamado "correr la coma". Si quisiéramos realizar las siguientes divisiones:

1234,5 : 10

1234,5: 100

1234,5 : 1000

Se verifica que, cuando el divisor es un uno seguido de ceros, el resultado de la división tiene las mismas cifras que el número original, pero con la coma corrida a la izquierda tantos lugares como ceros haya en el divisor. Utilizando esto, es rápido dar los resultados de las divisiones anteriores:

1234,5 : 10 = 123,45

1234,5: 100 = 12,345

1234,5 : 1000 = 1,2345

Utilizando esta idea y pensando las fracciones como una división, es posible convertir cualquier número decimal finito en fracción. Para esto, utilizamos de numerador el número sin coma y de denominador un uno seguido de tantos ceros como cifras haya luego de la coma:

$$1{,}23 = \frac{123}{100}$$

En el caso en que queramos convertir en fracción un número periódico, en el siguiente link encontrarás reglas para realizarlo:

https://www.youtube.com/watch?v=T8CcnxQzciU

5- “Casi 1”

En el trabajo con los desafíos vimos que algunos números decimales son periódicos, es decir, que su desarrollo decimal es infinito. Pero en matemáticas, la aparición del infinito puede hacer que sucedan cosas extrañas.

Si consideramos el número:

$$0,\hat{9} = 0,9999999999999999999999 \ldots \ldots$$

Podríamos decir que es casi 1, pero ¿cuánto le falta para llegar a uno?

Para contestar esto, podríamos realizar la siguiente cuenta:

$$1 - 0,\hat{9}$$

Pero ya vimos que cuando tenemos que operar con un número periódico no nos queda otro camino que convertirlo en fracción, así que vamos a escribir $0,\hat{9}$ como fracción. Para esto, podríamos hacer lo siguiente: si llamamos D al número periódico

$$D = 0,99999 \ldots ..$$

Multiplicando ambos términos por 10, resulta:

$10.D = 9,99999 \ldots ..$(corremos la coma un lugar a la derecha)

Pero si restamos ambas igualdades

$$10.D - D = 9,99999 \ldots .. - 0,99999 \ldots ..$$

$9.D = 9$ (se cancelan todos los 9 que están después de la coma)

Por lo que D debe ser igual a 1, resultando que:

$$1 - 0,\hat{9} = 0$$

Es decir que

$$1 = 0,\hat{9}$$

En el caso en que queramos convertir en fracción otro número periódico, en el siguiente link encontrarás reglas para realizarlo:
https://www.youtube.com/watch?v=T8CcnxQzciU